科 目 名 微分積分学 II **出 題 者 名 佐藤 弘康**

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int (x^2 - 6x + 5)\,dx$

$$= \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + C \qquad 【1 点】$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \int x^{-2}\,dx$$
$$= \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$
$$= -\frac{1}{x} + C \qquad 【1 点】$$

(3) $\displaystyle\int (3x-2)^4\,dx$

$$= \frac{1}{4+1}(3x-2)^{4+1} \times \frac{1}{3} + C$$
$$= \frac{1}{15}(3x-2)^5 + C \qquad 【1 点】$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx$

$$= \log|x-3| + C \qquad 【1 点】$$

(5) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + C \qquad 【1 点】$$

(6) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C \qquad 【1 点】$$

$\boxed{2}$ 置換積分を用いて，$\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2}\,dx$ を求めよ．

$x^2 - 2 = t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ であるから

$$\int x\sqrt{x^2-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C \qquad 【1 点】$$

（別解）$\sqrt{x^2-2} = t$，つまり，$x^2 - 2 = t^2$ とおくと，$x\,dx = t\,dt$．したがって，

$$\int x\sqrt{x^2-2}\,dx = \int t \times t\,dt$$
$$= \int t^2\,dt$$
$$= \frac{1}{2+1}t^{2+1} + C$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3 + C$$

$\boxed{3}$ 部分積分を用いて，$\displaystyle\int x\,e^{2x}\,dx$ を求めよ．

$$= \int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx$$
$$= x \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int (x)' \times \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}e^{2x} + C$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \qquad 【1 点】$$

学籍番号	1						学科	
氏名								

4 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-2x-3}\,dx$

$$=\int\left(\frac{5}{4}\times\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=\frac{5}{4}\log|x+1|-\frac{1}{4}\log|x-3|+C$$
$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{(x+1)^5}{x-3}\right|+C$$

【1 点】

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$

$$=\int\left(-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x+1}+\frac{5}{4}\times\frac{1}{x-1}+\frac{5}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{4}\log|x+1|+\frac{5}{4}\log|x-1|-\frac{5}{2}\times\frac{1}{x-1}+C$$
$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{(x-1)^5}{x+1}\right|-\frac{5}{2(x-1)}+C$$

【1 点】

5 $\displaystyle\frac{\sec x}{2\sin x-3\cos x}$ の原始関数が

$$\log\sqrt{2\tan x-3}$$

であることを示しなさい．

$$\left(\log\sqrt{2\tan x-3}\right)'=\frac{\sec x}{2\sin x-3\cos x}$$

を示せばよい．

$$\left(\log\sqrt{2\tan x-3}\right)'=\left(\frac{1}{2}\log(2\tan x-3)\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\tan x-3}\times(2\tan x-3)'$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\tan x-3}\times\frac{2}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{2\tan x-3}\times\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{(2\tan x-3)\cos x}\times\frac{1}{\cos x}$$
$$=\frac{1}{2\sin x-3\cos x}\times\sec x$$

【2 点】

6 $\displaystyle\int e^x\sin x\,\cos x\,dx$ を求めなさい．

$\displaystyle\int e^x\sin x\,\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int e^x\sin 2x\,dx$ である．そこで，$\displaystyle I=\int e^x\sin 2x\,dx$ とおくと，

$$I=\int (e^x)'\sin 2x\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-\int e^x(\sin 2x)'\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-2\int (e^x)'\cos 2x\,dx$$
$$=e^x\sin 2x-2\left\{e^x\cos 2x-\int e^x(\cos 2x)'\,dx\right\}$$
$$=e^x\sin 2x-2\left\{e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx\right\}$$
$$=e^x\sin 2x-2e^x\cos 2x-4I.$$

よって，$\displaystyle I=\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)$．以上のことから，

$$\int e^x\sin x\,\cos x\,dx=\frac{e^x}{10}(\sin 2x-2\cos 2x).$$

【2 点】

学籍番号	1							学科		
氏名										