1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x^2+6x-5)\,dx$

$$=\frac{x^3}{3}+3x^2-5x+C \qquad 【5点】$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$

$$\begin{aligned}&=\int x^{-3}\,dx\\&=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C\\&=-\frac{1}{2x^2}+C \qquad 【5点】\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int (2-3x)^4\,dx$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{4+1}(2-3x)^{4+1}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+C\\&=-\frac{1}{15}(2-3x)^5+C \qquad 【5点】\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\log|2x-3|+C \qquad 【5点】$$

(5) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C \qquad 【5点】$$

(6) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$

$$=\frac{1}{5}\sin 5x+C \qquad 【5点】$$

2 置換積分または部分積分を用いて次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2-2}\,dx$

$x^2-2=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ である．また，$x=2$ のとき $t=2$，$x=2\sqrt{2}$ のとき $t=6$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_2^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2-2}\,dx&=\frac{1}{2}\int_2^6\sqrt{t}\,dt \qquad 【5点】\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}\right]_2^6\\&=\frac{1}{3}\left(6^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)\\&=\frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{3} \qquad 【5点】\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$

$x=\sqrt{2}\sin t$ とおくと，$dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$ である．また，$x=0$ のとき $t=0$，$x=\sqrt{2}$ のとき $t=\frac{\pi}{2}$ である．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\,\cos t\,dt \qquad 【5点】\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+1)\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{2} \qquad 【5点】\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx\\&=\left[x\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1(x)'\times\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx \qquad 【5点】\\&=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx\\&=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)\\&=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4} \qquad 【5点】\end{aligned}$$

3 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$

$$=\int\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \quad 【5点】$$
$$=-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$
$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|-\frac{1}{x-1}+C \quad 【5点】$$

(2) $\displaystyle\int 2\,e^x\sin x\,\cos x\,dx$

$\displaystyle\int 2\,e^x\sin x\,\cos x\,dx=\int e^x\sin 2x\,dx$ である．そこで，

$\displaystyle I=\int e^x\sin 2x\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I&=\int (e^x)'\sin 2x\,dx\\
&=e^x\sin 2x-\int e^x(\sin 2x)'\,dx\\
&=e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2x\,dx\\
&=e^x\sin 2x-2\int (e^x)'\cos 2x\,dx\\
&=e^x\sin 2x-2\left\{e^x\cos 2x-\int e^x(\cos 2x)'\,dx\right\}\\
&=e^x\sin 2x-2\left\{e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\,dx\right\}\\
&=e^x\sin 2x-2e^x\cos 2x-4I.
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle I=\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)$.　　【10点】

4 次の広義積分が存在するならば，その値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^{3-\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{3}\right)\\
&=2\sqrt{3} \quad 【5点】
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log|x|\right]_\varepsilon^1\\
&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon
\end{aligned}$$

極限 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon$ は，負の無限大に発散するので，この異常積分の値は存在しない．　　【5点】

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^4}\,dx\\
&=\lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^M\\
&=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{3M^3}+\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{1}{3} \quad 【5点】
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の値を求めよ．

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\tan^2 x}dx$$

（第１項について）　$t=\sqrt{x}$ とおくと，$x^2=t$ より，$2x\,dx=dt$．また，$x=4$ のとき $t=2$，$x=9$ のとき $t=3$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx &= \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\times 2t\,dt = \int_2^3 \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt\\ &= \int_2^3 \left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\,dt\\ &= \left[2t+\log|t-1|-\log|t+1|\right]_2^3\\ &=2(3-2)+\log 2-\log 4-\log 1+\log 3\\ &=2+\log\frac{6}{4}\\ &=2+\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

（第２項について）$s=\tan x$ とおくと，

$$ds=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(1+\tan^2 x)\,dx=(1+s^2)\,dx.$$

また，$x=0$ のとき $t=0$，$x=\frac{\pi}{3}$ のとき $t=\sqrt{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3+\tan^2 x}dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+s^2}\times\frac{1}{1+s^2}\,ds\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{3+s^2}\right)\,ds.\end{aligned}$$

第１項は $\tan u=s$（u は 0 から $\frac{\pi}{3}$），第２項は $\sqrt{3}\tan v=s$（v は 0 から $\frac{\pi}{4}$）と置換する．すると，

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2 u}\times\frac{1}{\cos^2 u}\,du\right.\\ &\qquad\left.-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3+3\tan^2 v}\times\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 v}\,dv\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}du-\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dv\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left([u]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{3}[v]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{24}\left(4-\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

以上のことから，

$$2+\log\frac{3}{2}-\frac{\pi}{24}\left(4-\sqrt{3}\right)$$

となる．　【15 点（部分点なし）】