科 目 名 応用数学 I-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めなさい．

(1) $f(x,y)=x^2+3xy^2-4y^2$

$$f_x(x,y)=2x+3y^2$$
$$f_y(x,y)=6xy-8y$$

2つとも正解なら【3点】．
どちらか一方だけ正解なら【1点】

(2) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$f_x(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$f_y(x,y)=-\frac{2x}{(x+y)^2}$$

2つとも正解なら【3点】．
どちらか一方だけ正解なら【1点】

(3) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

2つとも正解なら【3点】．
どちらか一方だけ正解なら【1点】

2 関数 $f(x,y)=y\,e^{xy}$ の2次偏導関数を求めなさい．

$f_x(x,y)=y^2\,e^{xy}$ 【1点】

$f_y(x,y)=e^{xy}+xy\,e^{xy}=(1+xy)e^{xy}$ 【1点】

$f_{xx}(x,y)=y^3\,e^{xy}$ 【1点】

$f_{xy}(x,y)=2y\,e^{xy}+xy^2\,e^{xy}=(2+xy)ye^{xy}$ 【1点】

$f_{yy}(x,y)=2x\,e^{xy}+x^2y\,e^{xy}=x(2+xy)e^{xy}$ 【1点】

3 次の関数 $f(x,y)$ の全微分を求めなさい．

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

$f_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 【1点】

$f_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 【1点】

よって，

$df=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx+y\,dy)$ 【2点】

(2) $f(x,y)=\sin(xy)$

$f_x(x,y)=y\cos(xy)$ 【1点】

$f_y(x,y)=x\cos(xy)$ 【1点】

よって，

$df=\cos(xy)(y\,dx+x\,dx)$ 【2点】

4 関数 $f(x,y)=e^x\sin y$ に対し，

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$$

を求めなさい．

$f_x(x,y)=e^x\sin y$ 【1点】

$f_y(x,y)=e^x\cos y$ 【1点】

$f_{xx}(x,y)=e^x\sin y$ 【1点】

$f_{yy}(x,y)=-e^x\sin y$ 【1点】

よって，

$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=e^x\sin y-e^x\sin y=\mathbf{0}$ 【2点】

5 $f(x,y)=x^2+y^2$, $X(t)=t-\cos t$, $Y(t)=t+\sin t$ のとき，合成関数 $f(X(t),Y(t))$ を t で微分しなさい．

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2x & \text{【1 点】}\\
f_y(x,y) &= 2y & \text{【1 点】}\\
X'(t) &= 1+\sin t & \text{【1 点】}\\
Y'(t) &= 1+\cos t & \text{【1 点】}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}f(X(t),Y(t))\\
&=f_x(X,Y)\,X'+f_y(X,Y)\,Y'\\
&=2(t-\cos t)(1+\sin t)+2(t+\sin t)(1+\cos t)\\
&=2\left\{t(2+\cos t+\sin t)+(\sin t-\cos t)\right\} \qquad \text{【2 点】}
\end{aligned}
$$

または，

$$2(x+y+x\sin t+y\cos t)$$

6 $x^2+2xy-y^2=-8$ の陰関数 $y=f(x)$ の導関数 y' を求めなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおく【1 点】と，

$$
\begin{aligned}
F_x &= 2x+2y=2(x+y), & \text{【1 点】}\\
F_y &= 2x-2y=2(x-y) & \text{【1 点】}
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} & \text{【2 点】}\\
&= = -\frac{2(x+y)}{2(x-y)}=\underline{-\frac{x+y}{x-y}}. & \text{【1 点】}
\end{aligned}
$$

7 関数 $f(x,y)=x^3-9xy+y^3+9$ の極値を求めなさい．

f の偏導関数は

$$
\begin{aligned}
f_x &= 3x^2-9y=3(x^2-3y), & \text{【1 点】}\\
f_y &= -9x+3y^2=3(y^2-3x) & \text{【1 点】}
\end{aligned}
$$

である．連立方程式 $f_x=f_y=0$，すなわち

$$
\begin{cases}
x^2-3y=0\\
y^2-3x=0
\end{cases}
$$

を解くと，$(x,y)=(0,0)$ と $(3,3)$ である【1 点】．なぜなら，連立方程式の 1 つ目の式を $y=\dfrac{x^2}{3}$ と変形し，これを 2 つ目の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{x^4}{9}-3x=0 &\iff \frac{x}{9}(x^3-27)=0\\
&\iff \frac{x}{9}(x-3)(x^2+3x+9)=0\\
&\quad\ \therefore x=0,3
\end{aligned}
$$

これらの点で極値をとるか否か判定する．f の 2 次偏導関数は

$$
\begin{aligned}
(A=)\ f_{xx} &= 6x & \text{【1 点】}\\
(B=)\ f_{xy} &= -9 & \text{【1 点】}\\
(C=)\ f_{yy} &= 6y & \text{【1 点】}
\end{aligned}
$$

である．

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき，

$$AC-B^2=0\times 0-(-9)^2=-81<0$$

であるから，この点で <u>極値はとらない</u>【1 点】．

(ii) $(x,y)=(3,3)$ のとき，

$$AC-B^2=18\times 18\times 18-(-9)^2=27\times 9>0$$

なので，この点で極値をとる【1 点】．$A=18>0$ より，この点で極小値をとり【1 点】，その値は

$$f(3,3)=27-81+27+9=\underline{-18} \quad \text{【1 点】}$$