1　次の累次積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (2x-y)\,dx\,dy$

$$=\int_1^2\left[x^2-xy\right]_{x=0}^{x=1}dy \quad【1 点】$$
$$=\int_1^2(1-y)\,dy \quad【1 点】$$
$$=\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_1^2 \quad【1 点】$$
$$=\left(2-\frac{4}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\boldsymbol{\frac{1}{2}} \quad【2 点】$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx$

$$=\int_0^1 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}dx \quad【1 点】$$
$$=\int_0^1\frac{x^4}{2}dx \quad【1 点】$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \quad【1 点】$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{10}} \quad【2 点】$$

2　次の 2 重積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\iint_D(3-x-y)\,dxdy \quad D:0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$

$$=\int_0^2\int_0^1(3-x-y)\,dy\,dx \quad【3 点】$$
$$=\int_0^2\left[(3-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx \quad【1 点】$$
$$=\int_0^2\left\{(3-x)-\frac{1}{2}\right\}dx$$
$$=\int_0^2\left(\frac{5}{2}-x\right)dx \quad【1 点】$$
$$=\left[\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \quad【1 点】$$
$$=5-2$$
$$=\boldsymbol{3} \quad【1 点】$$

(2) $\displaystyle\iint_D(x+y)e^y\,dxdy \quad D:0\le x\le 1,\ -x\le y\le 0$

$$=\int_0^1\int_{-x}^0(x+y)e^y\,dy\,dx \quad【3 点】$$
$$=\int_0^1\int_{-x}^0(x+y)\left(e^y\right)'\,dy\,dx$$
$$=\int_0^1\left\{\left[(x+y)e^y\right]_{y=-x}^{y=0}-\int_{-x}^0(x+y)'e^y\,dy\right\}dx \quad【1 点】$$
$$=\int_0^1\left\{x-\int_{-x}^0 e^y\,dy\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left\{x-\left[e^y\right]_{y=-x}^{y=0}\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(x-1+e^{-x}\right)dx \quad【1 点】$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-x-e^{-x}\right]_0^1 \quad【1 点】$$
$$=\frac{1}{2}-1-e^{-1}-(-1)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-e^{-1}} \quad【1 点】$$

3 次の累次積分の積分順序を変更しなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy \quad 【6 点】$$

- 積分領域の図が正しく描いているか，または
- 積分区間が $\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{y}$ となっている

場合は，部分点【3 点】．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx \quad 【6 点】$$

- 積分領域の図が正しく描いているか，または
- 2 つの積分領域のうち一方にみ記述している

場合は，部分点【3 点】．

4 積分順序を変更して 2 重積分 $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ を求めなさい．

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx \quad 【3 点】\\
&= \int_0^1 e^{x^2}\,[y]_{y=0}^{y=x}\,dx \quad 【1 点】\\
&= \int_0^1 xe^{x^2}\,dx \quad 【1 点】\\
&= \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 \quad 【1 点】\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}(e-1)} \quad 【1 点】
\end{aligned}$$

5 円柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=1-x$ および $z=0$ で囲まれた立体の体積を求めなさい．

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (1-x)\,dx\,dy \quad 【3 点】\\
&= \int_{-1}^1 \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \quad 【1 点】\\
&= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2}\,dy \quad 【1 点】
\end{aligned}$$

$y=\sin t$ と変換すると，$dy=\cos t\,dt$ であり，積分区間は $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$．したがって，

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt\\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t + 1\,dt\\
&= \left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\pi} \quad 【2 点】
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy\,dx$，$\displaystyle 2\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} z\,dy\,dx$ でも可．
- $\displaystyle 2\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dx\,dy$ は不可．