科 目 名 数学 II-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．このとき, 正規分布表を用いて, 次の確率を求めなさい．【各 5 点】

(1) $P(-0.97 \leqq Z \leqq 0)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 0.97)\\
&= \Phi(0.97)\\
&= \mathbf{0.33398}.
\end{aligned}
$$

(2) $P(0.51 \leqq Z \leqq 2.22)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 2.22) - P(0 \leqq Z < 0.51)\\
&= \Phi(2.22) - \Phi(0.51)\\
&= 0.48679 - 0.19497\\
&= \mathbf{0.29182}.
\end{aligned}
$$

(3) $P(1.57 \leqq Z)$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(Z < 1.57)\\
&= 1 - (0.5 + P(0 \leqq Z < 1.57))\\
&= 0.5 - P(0 \leqq Z < 1.57)\\
&= 0.5 - \Phi(1.57)\\
&= 0.5 - 0.44179\\
&= \mathbf{0.05821}.
\end{aligned}
$$

2 X は期待値 $\mu = 140$, 分散 $\sigma^2 = 25$ の正規分布に従う確率変数である．このとき, 正規分布表を用いて, 次を求めなさい．【各 5 点】

(1) $P(137.4 \leqq X \leqq 152.3)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{137.4 - 140}{5} \leqq \frac{X - 140}{5} \leqq \frac{152.3 - 140}{5}\right)\\
&= P\left(-\frac{2.6}{5} \leqq Z \leqq \frac{12.3}{5}\right) \qquad \text{【2 点】}\\
&= P(-0.52 \leqq Z \leqq 2.46)\\
&= P(-0.52 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 2.46)\\
&= \Phi(0.52) + \Phi(2.46)\\
&= 0.19847 + 0.49305\\
&= \mathbf{0.69152}. \qquad \text{【3 点】}
\end{aligned}
$$

(2) $P(X \leqq 131.1)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{X - 140}{5} \leqq \frac{131.1 - 140}{5}\right)\\
&= P\left(Z \leqq -\frac{8.9}{5}\right) = P(Z \leqq -1.98) \qquad \text{【2 点】}\\
&= P(1.98 \leqq Z)\\
&= 1 - P(Z \leqq 1.98)\\
&= 1 - (0.5 + P(0 \leqq Z \leqq 1.98))\\
&= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.98)\\
&= 0.5 - \Phi(1.98)\\
&= 0.5 - 0.47615\\
&= \mathbf{0.02385}. \qquad \text{【3 点】}
\end{aligned}
$$

(3) $P(X \leqq c) = 90\%$ を満たす数 c

$$
\begin{aligned}
0.9 &= P(X \leqq c)\\
&= P\left(\frac{X - 140}{5} \leqq \frac{c - 140}{5}\right) = P\left(Z \leqq \frac{c - 140}{5}\right) \qquad \text{【2 点】}\\
&= 0.5 + P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{c - 140}{5}\right)\\
&= 0.5 + \Phi\left(\frac{c - 140}{5}\right).
\end{aligned}
$$

よって, c は $\Phi\left(\frac{c - 140}{5}\right) = 0.4$ を満たす数である．正規分布表より, $\frac{c - 140}{5} = 1.28$. よって,

$$c = 1.28 \times 5 + 140 = \mathbf{146.4}.$$

3 鋼棒の製造工程において, その直径 X は平均 2 インチ, 標準偏差 0.008 インチの正規分布に従うとする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 鋼棒の直径が 2 インチから 0.02 インチより離れているものは, 不良品となるとき, 不良品の割合は平均的に何%と考えるべきか. 【5 点】

$$\begin{aligned} P(|X-2|>0.02) =&1-P\left(2-0.02 \leqq X \leqq 2+0.02\right) \\ =&1-P\left(-\frac{0.02}{0.008} \leqq \frac{X-2}{0.008} \leqq \frac{0.02}{0.008}\right) \\ =&1-P\left(-2.5 \leqq Z \leqq 2.5\right) \\ =&1-2P\left(0 \leqq Z \leqq 2.5\right) \\ =&1-2\Phi(2.5) \\ =&1-2\times 0.49379 \\ =&0.01242. \end{aligned}$$

よって, 不良品の割合はおよそ **1.24%** である.

(2) 不良品の割合を 4% とするためには, 2 インチから最大どの程度の偏差（誤差）をもつものまでを良品として許容すべきか. 【5 点】

$$P(|X-2|>\varepsilon)=0.04$$

を満たす ε を求める.

$$\begin{aligned} 0.04 =&P(|X-2|>\varepsilon) \\ =&1-P\left(2-\varepsilon \leqq X \leqq 2+\varepsilon\right) \\ =&1-P\left(-\frac{\varepsilon}{0.008} \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{0.008}\right) \\ =&1-2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{0.008}\right) \\ =&1-2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0.008}\right) \\ \Longleftrightarrow& \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0.008}\right)=\frac{0.96}{2}=0.48. \end{aligned}$$

正規分布表より, $\dfrac{\varepsilon}{0.008}=2.05$ であるから,

$$\therefore\ \varepsilon = 2.05\times 0.008 = \mathbf{0.0164}.$$

- (1)(2) ともに片側だけで確率を求めている場合は，それぞれ部分点【2 点】加点する.

4 表と裏の出やすさが同じである硬貨を 4040 回投げるときに, 表が出る回数を X とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) X は二項分布に従う確率変数と考えられる. X の期待値と分散の値を答えなさい. 【5 点】

X は 二項分布 $B\left(4040, \frac{1}{2}\right)$ に従うので, 期待値は,

$$\mu = 4040\times\frac{1}{2} = \mathbf{2020},$$

分散は

$$\sigma^2 = 4040\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{1010}$$

である.

- 片方だけ求めている場合は【2 点】
- ただし, (2) において, X が $N(2020, 1010)$ に従うとして計算している場合は【5 点】.

(2) X が近似的に正規分布に従うとして, 表が 2048 回以上でる確率を求めなさい. 【5 点】

$$\begin{aligned} P(2048 \leqq X) \approx& P(2048-0.5 \leqq X) \\ =&P\left(\frac{2048-0.5-2020}{\sqrt{1010}} \leqq \frac{X-2020}{\sqrt{1010}}\right) \\ =&P\left(\frac{27.5}{\sqrt{1010}} \leqq Z\right) \\ =&0.5-P\left(0 \leqq Z < \frac{27.5}{\sqrt{1010}}\right) \qquad \text{【2 点】} \\ =&0.5-\Phi\left(\frac{27.5}{\sqrt{1010}}\right) \\ =&0.5-\Phi\left(0.87\right) \\ =&0.5-0.30785 \\ =&\mathbf{0.19215}. \end{aligned}$$

- 正規分布に近似して確率を求める際, ± 0.5 補正をしていない場合は【1 点】減点する.

5 ある地方の小学校新入生男子の平均身長 μ を調べたい．そのため，900 人を無作為抽出したら，平均は 116.2cm であった．過去の資料から，小学校新入生男子の身長は，標準偏差 $\sigma = 4.86$cm の正規分布に従うと考えられる．平均身長 μ の信頼度 95% と 90% の信頼区間をそれぞれ求めなさい．【15 点】

900 人分の平均を $\bar{x}$ とおくと，これは $N(\mu, 4.86^2/900)$ に従う確率変数のひとつの現実値である．信頼度 β の信頼区間を

$$[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon], \qquad \bar{x} = 116.2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\beta =& P(\bar{x}-\varepsilon \leqq \mu \leqq \bar{x}+\varepsilon)\\
=& P(-\varepsilon \leqq \bar{x}-\mu \leqq \varepsilon)\\
=& P\left(-\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} \leqq \frac{\bar{x}-\mu}{4.86/\sqrt{900}} \leqq \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right)\\
=& 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right)\\
=& 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right). \qquad \text{【5 点】}
\end{aligned}$$

信頼度 $\beta = 0.95$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.95}{2} = 0.475\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} = 1.96 \qquad \text{【3 点】}\\
\Longleftrightarrow\ & \varepsilon = 1.96 \times \frac{4.86}{\sqrt{900}} = \frac{1.96 \times 4.86}{30} = 0.31752.
\end{aligned}$$

よって，信頼限度は 116.2 ± 0.32 であるから，信頼区間は

$$\mathbf{[115.88, 116.52]}$$

である．【2 点】

一方，信頼度 $\beta = 0.9$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.9}{2} = 0.45\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} = 1.64 \qquad \text{【3 点】}\\
\Longleftrightarrow\ & \varepsilon = 1.64 \times \frac{4.86}{\sqrt{900}} = \frac{1.64 \times 4.86}{30} = 0.26568.
\end{aligned}$$

よって，信頼限度は 116.2 ± 0.27 であるから，信頼区間は

$$\mathbf{[115.93, 116.47]}$$

である．【2 点】

6 ある精密機器メーカーでは，直径の平均が $\mu = 3.32$ cm，標準偏差 $\sigma = 0.03$ cm のボルトを製造していた．ある日，10 個のボルトを任意に抽出したら，直径の平均が 3.34 cm であった．このボルトの製造機械は正常に動作しているだろうか？有意水準 5% で検定しなさい．【15 点】

(1) 帰無仮説 H_0 を「直径の平均は $\mu = 3.32$cm である」とする．【3 点】

(2) 対立仮説 H_1 は「$\mu = \mu_1 \neq 3.32$cm である」とする．【3 点】
（片側検定の場合は，-1 して【2 点】）

(3) 10 個の標本平均 $X = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ を考えると，これは $N(\mu, 0.03^2/10)$ に従う．【3 点】

(4) 対立仮説の設定から，両側検定する．よって，棄却域は

$$P(|Z| > k) = 0.05 \text{ を満たす } Z \text{ の全体}$$

となる（ただし，Z は $N(0,1)$ に従う確率変数）．

$$\begin{aligned}
0.05 =& P(|Z| > k) = 2P(k < Z)\\
=& 2(0.5 - P(0 \leqq Z \leqq k)) = 2(0.5 - \Phi(k))
\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi(k) = 0.5 - \frac{0.05}{2} = 0.475$$

$$\therefore\ k = 1.96.$$

よって，棄却域の不等式は

$$\begin{aligned}
|Z| > 1.96 \iff & \left|\frac{\bar{X} - 3.32}{0.03/\sqrt{10}}\right| > 1.96\\
\iff & |\bar{X} - 3.32| > 1.96 \times \frac{0.03}{\sqrt{10}} = 0.01859...
\end{aligned}$$

である．つまり，棄却域 W は $|w - 3.32| > 0.01859$ を満たす w の全体である．【3 点】

(5) 今，サイズ 10 の実測値が 3.34 だが，これは

$$|3.34 - 3.32| = 0.02 > 0.01859$$

より，棄却域に含まれるので，**H_0 は棄却される**．【3 点】

つまり，**製造機械が正常に動作しているとはいえない**．