科 目 名 代数幾何 I 出 題 者 名 佐藤 弘康

**1** 次の計算をしなさい【各 10 点】.

(1) $2\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 18 & 12 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -15 & -9 & -3 \end{pmatrix} \quad【5 点】$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -11 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad【5 点】$$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad【5 点】$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -33 & 29 \end{pmatrix} \quad【5 点】$$

または

$$= \begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 17 & 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 & 9 \\ 50 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -33 & 29 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} {}^t\!\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad【5 点】$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 24 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad【5 点】$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -19 & 28 & 5 \\ -7 & 17 & -11 \\ -15 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

3 つの成分の間違いまでは【5 点】加点する.

**2** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列が存在するか否か判定しなさい. 逆行列が存在する場合は $A^{-1}$ を求めなさい.【5 点】

$$A^{-1} = \frac{1}{1\times 4 - 2\times(-2)}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

**3** クラメールの公式を用いて連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -2x + 4y - 6z = 2 \\ x - 3y + 5z = 1 \\ -x + 4y - 2z = -8 \end{cases}$$

の解を求めなさい.【10 点】

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 20 - 24 - (-18 - 40 - 8)$$

$$= -56 + 66 = 10, \quad【2 点】$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -8 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 160 - 24 - (-144 + 40 - 8)$$

$$= -172 + 112 = -60, \quad【2 点】$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 10 + 48 - (6 - 4 + 80)$$

$$= 42 - 82 = -40 \quad【2 点】$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -48 - 4 + 8 - (6 - 8 - 32)$$

$$= -44 + 34 = -10. \quad【2 点】$$

$$\therefore \quad x = -6, y = -4, z = -1 \quad【2 点】$$

**4** 下の行列の変形は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+5y+8z=10 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$$

の拡大係数行列を行基本変形したものである．この変形が正しいか否か判定しなさい．正しい場合はその正しさを証明し，正しくない場合は正しい行基本変形を施して連立 1 次方程式の解を求めなさい．【15 点】

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 16 & -4 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

上の行基本変形が正しければ，連立方程式の解は

$$x=-\frac{1}{4},\ y=\frac{5}{2},\ z=\frac{1}{4}$$

である．しかし，これらは連立 1 次方程式の 1 つ目と 2 つ目の式を満たすものの, 3 つ目の式は満たさない．よって，この変形は正しくない．【5 点】
実際には, この連立 1 次方程式は解を持たない．【5 点】

**5** 掃き出し法を用いて連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+4y+3z=5 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$$

の解を求めなさい．【15 点】

行基本変形の例：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{【10 点】}$$

よって，解は $\underline{x=1-2k,\ y=k,\ z=1}$ である（ただし，$k$ は任意の定数）．【5 点】
また, 2 回以上行基本変形が正しく行われいれば【5 点】加点.

**6** 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．【15 点】

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{【5 点】}$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -7 & 7 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 9/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \text{【5 点】}$$

よって，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7/2 & -3/2 \\ 2 & -9/2 & 3/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である【5 点】．

余因子行列による逆行列の公式を用いてもよい．正しい成分が 3〜5 個の場合【5 点】，6〜8 個の場合【10 点】，すべて正しくて【15 点】とする．

**7** 同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z + aw = 0 \\ x + y + az + w = 0 \\ x + ay + z + w = 0 \\ ax + y + z + w = 0 \end{cases}$$

（ただし，$a$ は定数）は，$a = 1, -3$ のときに限り非自明解をもつ．この理由を説明しなさい（この命題を証明しなさい）．【15 点】

この連立 1 次方程式を掃き出し法で解く．ただし，同次なので定数項の列は省略する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & -(a-1) \\ 0 & a-1 & 0 & -(a-1) \\ 0 & -(a-1) & -(a-1) & -(a+1)(a-1) \end{pmatrix}$$

ここで，$a = 1$ ならば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，解は非自明解

$$x = -h - k - l, \ y = h, \ z = k, \ w = l$$

である．$a \neq 1$ ならば，

$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -(a+1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3) \end{pmatrix}$$

ここで，$a = -3$ ならば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，解は非自明解 $x = y = z = w = k$ である．$a \neq -3$ ならば，

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．以上のことから，$a = 1, -3$ のときに限り非自明解をもつ．