科 目 名 微分積分学 III　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+2y^2}$ の極限値が存在するならばその値を求め, 存在しないならばその理由を述べなさい.

平面上の点の座標を

$$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

と極表示すると, $(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ である. すると,

$$\frac{x^2y}{x^2+2y^2}=r\cdot\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}\longrightarrow 0\ (r\to 0)$$

となるので, 極限値は $\underline{\mathbf{0}}$ である. 【5 点】

2 次の関数 $f(x,y)$ の 2 次偏導関数を求めなさい.

(1) $f(x,y)=x^2+3xy^2-4y^2$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)=&2x+3y^2 && 【2 点】\\
f_y(x,y)=&6xy-8y && 【2 点】\\
f_{xx}(x,y)=&2 && 【2 点】\\
f_{xy}(x,y)=&6y && 【2 点】\\
f_{yy}(x,y)=&6x-8 && 【2 点】
\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=y\,e^{xy}$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)=&y^2\,e^{xy} && 【2 点】\\
f_y(x,y)=&e^{xy}+xy\,e^{xy}=(1+xy)e^{xy} && 【2 点】\\
f_{xx}(x,y)=&y^3\,e^{xy} && 【2 点】\\
f_{xy}(x,y)=&2y\,e^{xy}+xy^2\,e^{xy}=(2+xy)ye^{xy} && 【2 点】\\
f_{yy}(x,y)=&2x\,e^{xy}+x^2y\,e^{xy}=x(2+xy)e^{xy} && 【2 点】
\end{aligned}$$

3 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ の全微分を求めなさい.

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)=&\frac{2x}{x^2+y^2} && 【1 点】\\
f_y(x,y)=&\frac{2y}{x^2+y^2} && 【1 点】
\end{aligned}$$

よって,

$$df=\frac{2}{x^2+y^2}(x\,dx+y\,dy)\qquad【3 点】$$

4 関数 $f(x,y)=x^3-9xy+y^3+9$ の極値を求めなさい.

f の偏導関数は

$$\begin{aligned}
f_x=&3x^2-9y=3(x^2-3y), && 【1 点】\\
f_y=&-9x+3y^2=3(y^2-3x) && 【1 点】
\end{aligned}$$

である. 連立方程式 $f_x=f_y=0$, すなわち

$$\begin{cases} x^2-3y=0\\ y^2-3x=0\end{cases}$$

を解くと, $(x,y)=(0,0),(3,3)$ であることがわかる【3 点】. 実際, 連立方程式の 1 つ目の式を $y=\dfrac{x^2}{3}$ と変形し, これを 2 つ目の式に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{9}-3x=0 &\Longleftrightarrow \frac{x}{9}(x^3-27)=0\\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{9}(x-3)(x^2+3x+9)=0\\
&\quad\ \therefore x=0,3
\end{aligned}$$

これらの点で極値をとるか否か判定する. f の 2 次偏導関数は

$$\begin{aligned}
(A=)\ f_{xx}=&6x && 【1 点】\\
(B=)\ f_{xy}=&-9 && 【1 点】\\
(C=)\ f_{yy}=&6y && 【1 点】
\end{aligned}$$

である.
(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき,

$$AC-B^2=0\times 0-(-9)^2=-81<0$$

であるから, この点で極値はとらない【2 点】.
(ii) $(x,y)=(3,3)$ のとき,

$$AC-B^2=18\times 18\times 18-(-9)^2=27\times 9>0$$

なので, この点で極値をとる【2 点】. $A=18>0$ より, この点で極小値をとり【2 点】, その値は

$$f(3,3)=27-81+27+9=\mathbf{-18}.\quad【1 点】$$

5 $F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ に対し，$F(x,y)=0$ の陰関数を $y=f(x)$ とおく．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 導関数 $f'(x)$ を x と y を用いて表しなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおくと，

$$F_x = 2x+2y = 2(x+y), \qquad 【1 点】$$
$$F_y = 2x-2y = 2(x-y) \qquad 【1 点】$$

である．よって，

$$f' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$
$$= = -\frac{2(x+y)}{2(x-y)} = \underline{-\frac{x+y}{x-y}}. \qquad 【2 点】$$

(2) $f(x)$ の極値を求めなさい．

$x=a$ で極値 $f(a)=b$ をとるとする．このとき，

$$F(a,b)=0 \quad \therefore\ a^2+2ab-b^2+8=0 \qquad (1)$$

が成り立つ【1 点】．

また，$f'(a)=0$ より，

$$0=f'(a)=-\frac{a+b}{a-b} \quad \therefore\ b=-a \qquad (2)$$

である【1 点】．

(2) を (1) に代入すると

$$0=a^2+2a\cdot(-a)-(-a)^2+8=-2(a-2)(a+2)$$

$$\therefore\ a=\pm 2 \qquad 【1 点】$$

よって，$(a,b)=(2,-2)$ または $(-2,2)$ のいずれかである．

次に $f''(a)$ の符号を調べ，極値をとるか否か判定する．

$$f''(a) = -\frac{F_{xx}+2F_{xy}f'(a)+F_{yy}f'(a)^2}{F_y}$$
$$= -\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$$
$$= -\frac{2}{2(x-y)} = -\frac{1}{x-y} \qquad 【1 点】$$

$(a,b)=(2,-2)$ のとき，$f''(2)=-\dfrac{1}{2-(-2)}=-\dfrac{1}{4}<0$ であるから，$\boldsymbol{b=-2}$ は極大値である．【1 点】

$(a,b)=(-2,2)$ のとき，$f''(-2)=-\dfrac{1}{-2-2}=\dfrac{1}{4}>0$ であるから，$\boldsymbol{b=2}$ は極小値である．【1 点】

6 次の 2 重積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (2x-y)\,dx\,dy$

$$= \int_1^2 \left[x^2-xy\right]_{x=0}^{x=1} dy \qquad 【2 点】$$
$$= \int_1^2 (1-y)\,dy \qquad 【2 点】$$
$$= \left[y-\frac{y^2}{2}\right]_1^2 \qquad 【2 点】$$
$$= \left(2-\frac{4}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \qquad 【4 点】$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx \qquad 【2 点】$$
$$= \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx \qquad 【2 点】$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \qquad 【2 点】$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{10}} \qquad 【4 点】$$

(3) $\displaystyle\iint_D (x+y)e^y\,dxdy \quad D: 0\le x\le 1,\ -x\le y\le 0$

$$= \int_0^1\int_{-x}^0 (x+y)e^y\,dy\,dx \qquad 【2 点】$$
$$= \int_0^1\int_{-x}^0 (x+y)\left(e^y\right)'\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left\{\left[(x+y)e^y\right]_{y=-x}^{y=0} - \int_{-x}^0 (x+y)'e^y\,dy\right\} dx \qquad 【2 点】$$
$$= \int_0^1 \left\{x-\int_{-x}^0 e^y\,dy\right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left\{x-\left[e^y\right]_{y=-x}^{y=0}\right\} dx$$
$$= \int_0^1 \left(x-1+e^{-x}\right) dx \qquad 【2 点】$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}-x-e^{-x}\right]_0^1 \qquad 【2 点】$$
$$= \frac{1}{2}-1-e^{-1}-(-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}-e^{-1}} \qquad 【2 点】$$

7 D を不等式 $x^2 \leqq y \leqq \frac{x}{2}$ を満たす領域とする．このとき，

$$\iint_D xy\,dxdy$$

を求めなさい．

放物線 $y = x^2$ と 直線 $y = \frac{x}{2}$ の交点は原点 $(0,0)$ と点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である．よって，領域 D は 2 つの不等式 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$，$x^2 \leqq y \leqq \frac{x}{2}$ を満たす点 (x,y) の全体である．したがって，

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dxdy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x^2}^{\frac{x}{2}} xy\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\frac{x^2}{2^3} - \frac{x^4}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2^3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - 4x^5 \right) dx \\
&= \frac{1}{2^3} \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2^6} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} \right) \\
&= \frac{1}{2^8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \mathbf{\frac{1}{1536}}.
\end{aligned}$$

【15 点】