

1  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$  の極限值が存在するならばその値を求め、存在しないならばその理由を述べなさい。

平面上の点の座標を

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

と極表示すると、 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  は  $r \rightarrow 0$  である。すると、

$$\frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2} = r \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

となるので、極限値は 0 である。【5点】

2 次の関数  $f(x, y)$  の2次偏導関数を求めなさい。

(1)  $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 4y^2$

$f_x(x, y) = 2x + 3y^2$  【2点】

$f_y(x, y) = 6xy - 8y$  【2点】

$f_{xx}(x, y) = 2$  【2点】

$f_{xy}(x, y) = 6y$  【2点】

$f_{yy}(x, y) = -8$  【2点】

(2)  $f(x, y) = y e^{xy}$

$f_x(x, y) = y^2 e^{xy}$  【2点】

$f_y(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} = (1 + xy)e^{xy}$  【2点】

$f_{xx}(x, y) = y^3 e^{xy}$  【2点】

$f_{xy}(x, y) = 2y e^{xy} + xy^2 e^{xy} = (2 + xy)ye^{xy}$  【2点】

$f_{yy}(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy} = x(2 + xy)e^{xy}$  【2点】

3  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  の全微分を求めなさい。

$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$  【1点】

$f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$  【1点】

よって、

$df = \frac{2}{x^2 + y^2}(x dx + y dy)$  【3点】

4 関数  $f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3 + 9$  の極値を求めなさい。

$f$  の偏導関数は

$f_x = 3x^2 - 9y = 3(x^2 - 3y)$ , 【1点】

$f_y = -9x + 3y^2 = 3(y^2 - 3x)$  【1点】

である。連立方程式  $f_x = f_y = 0$ , すなわち

$$\begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

を解くと、 $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$  であることがわかる【3点】。

実際、連立方程式の1つ目の式を  $y = \frac{x^2}{3}$  と変形し、これを2つ目の式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{9} - 3x &= 0 \iff \frac{x}{9}(x^3 - 27) = 0 \\ &\iff \frac{x}{9}(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0 \\ &\therefore x = 0, 3 \end{aligned}$$

これらの点で極値をとるか否か判定する。 $f$  の2次偏導関数は

(A)  $f_{xx} = 6x$  【1点】

(B)  $f_{xy} = -9$  【1点】

(C)  $f_{yy} = 6y$  【1点】

である。

(i)  $(x, y) = (0, 0)$  のとき、

$$AC - B^2 = 0 \times 0 - (-9)^2 = -81 < 0$$

であるから、この点で極値はとらない【2点】。

(ii)  $(x, y) = (3, 3)$  のとき、

$$AC - B^2 = 18 \times 18 \times 18 - (-9)^2 = 27 \times 9 > 0$$

なので、この点で極値をとる【2点】。 $A = 18 > 0$  より、この点で極小値をとり【2点】、その値は

$$f(3, 3) = 27 - 81 + 27 + 9 = -18. \quad \text{【1点】}$$

5  $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8$  に対し,  $F(x, y) = 0$  の陰関数を  $y = f(x)$  とおく. このとき, 次の間に答えなさい.

(1) 導関数  $f'(x)$  を  $x$  と  $y$  を用いて表しなさい.

$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 8$  とおくと,

$$F_x = 2x + 2y = 2(x + y), \quad \text{【1点】}$$

$$F_y = 2x - 2y = 2(x - y) \quad \text{【1点】}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \\ &= -\frac{2(x + y)}{2(x - y)} = -\frac{x + y}{x - y}. \quad \text{【2点】} \end{aligned}$$

(2)  $f(x)$  の極値を求めなさい.

$x = a$  で極値  $f(a) = b$  をとるとする. このとき,

$$F(a, b) = 0 \quad \therefore a^2 + 2ab - b^2 + 8 = 0 \quad (1)$$

が成り立つ【1点】.

また,  $f'(a) = 0$  より,

$$0 = f'(a) = -\frac{a + b}{a - b} \quad \therefore b = -a \quad (2)$$

である【1点】.

(2) を (1) に代入すると

$$0 = a^2 + 2a \cdot (-a) - (-a)^2 + 8 = -2(a - 2)(a + 2)$$

$$\therefore a = \pm 2 \quad \text{【1点】}$$

よって,  $(a, b) = (2, -2)$  または  $(-2, 2)$  のいずれかである.

次に  $f''(a)$  の符号を調べ, 極値をとるか否か判定する.

$$\begin{aligned} f''(a) &= -\frac{F_{xx} + 2F_{xy}f'(a) + F_{yy}f'(a)^2}{F_y} \\ &= -\frac{F_{xx}(a, b)}{F_y(a, b)} \\ &= -\frac{2}{2(x - y)} = -\frac{1}{x - y} \quad \text{【1点】} \end{aligned}$$

$(a, b) = (2, -2)$  のとき,  $f''(2) = -\frac{1}{2 - (-2)} = -\frac{1}{4} < 0$  であるから,  $b = -2$  は極大値である.【1点】

$(a, b) = (-2, 2)$  のとき,  $f''(-2) = -\frac{1}{-2 - 2} = \frac{1}{4} > 0$  であるから,  $b = 2$  は極小値である.【1点】

6 次の2重積分を求めなさい.

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \int_0^1 (2x - y) dx dy &= \int_1^2 [x^2 - xy]_{x=0}^{x=1} dy \quad \text{【2点】} \\ &= \int_1^2 (1 - y) dy \quad \text{【2点】} \\ &= \left[ y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \quad \text{【2点】} \\ &= \left( 2 - \frac{4}{2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{【4点】} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 \int_0^x x^2 y dy dx &= \int_0^1 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \quad \text{【2点】} \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx \quad \text{【2点】} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \quad \text{【2点】} \\ &= \frac{1}{10} \quad \text{【4点】} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_D (x + y)e^y dx dy \quad D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0 &= \int_0^1 \int_{-x}^0 (x + y)e^y dy dx \quad \text{【2点】} \\ &= \int_0^1 \int_{-x}^0 (x + y)(e^y)' dy dx \\ &= \int_0^1 \left\{ [(x + y)e^y]_{y=-x}^{y=0} - \int_{-x}^0 (x + y)' e^y dy \right\} dx \quad \text{【2点】} \\ &= \int_0^1 \left\{ x - \int_{-x}^0 e^y dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ x - [e^y]_{y=-x}^{y=0} \right\} dx \\ &= \int_0^1 (x - 1 + e^{-x}) dx \quad \text{【2点】} \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - x - e^{-x} \right]_0^1 \quad \text{【2点】} \\ &= \frac{1}{2} - 1 - e^{-1} - (-1) \\ &= \frac{1}{2} - e^{-1} \quad \text{【2点】} \end{aligned}$$

7  $D$  を不等式  $x^2 \leq y \leq \frac{x}{2}$  を満たす領域とする. このとき,

$$\iint_D xy \, dx dy$$

を求めなさい.

放物線  $y = x^2$  と直線  $y = \frac{x}{2}$  の交点は原点  $(0, 0)$  と点  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  である. よって, 領域  $D$  は2つの不等式  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $x^2 \leq y \leq \frac{x}{2}$  を満たす点  $(x, y)$  の全体である. したがって,

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x^2}^{\frac{x}{2}} xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x \left( \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2^3} \int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 - 4x^5) dx \\ &= \frac{1}{2^3} \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^3} \left( \frac{1}{2^6} - \frac{1}{3 \cdot 2^5} \right) \\ &= \frac{1}{2^8} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{1536}. \quad \text{【15点】} \end{aligned}$$