科 目 名 微分積分学 I 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の極限値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+3)=-1+3=\mathbf{2}$$

【5 点】

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)-2}{2(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2(1+1)}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

【5 点】

2 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ を微分しなさい．

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{x+1+h}-\sqrt{x+1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+1+h)-(x+1)}{h(\sqrt{x+1+h}+\sqrt{x+1})}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{x+1+h}+\sqrt{x+1})}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1+h}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1+0}+\sqrt{x+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$$

【5 点】

3 次の関数 y の導関数を求めなさい．

(1) $y=3x^4-2x^3+5x+3$

$y'=12x^3-6x^2+5$ 【5 点】

(2) $y=(3-2x)^4$

$$y'=4(3-2x)^{4-1}\times(-2)=-8(3-2x)^3=64x^3-288x^2+432x-216$$

【5 点】

(3) $y=\sqrt{3x-2}$

$y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ 【5 点】

(4) $y=e^{3x+1}$

$y'=3e^{3x+1}$ 【5 点】

(5) $y=\log(5+2x)$

$y'=\dfrac{2}{5+2x}$ 【5 点】

(6) $y=\cos(4-3x)$

$y'=-\sin(4-3x)\times(4-3x)'=3\sin(4-3x)$ 【5 点】

(7) $y = \dfrac{x+7}{3-x^2}$

$$y' = \frac{(3-x^2)-(x+7)\times(-2x)}{(3-x^2)^2} \quad (3\text{ 点})$$
$$= \frac{x^2+14x+3}{(3-x^2)^2} \quad 【5\text{ 点}】$$

(8) $y = (x^2+3)\sqrt{2x+1}$

$$y' = 2x\sqrt{2x+1} + (x^2+3)\times\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2$$
$$= 2x\sqrt{2x+1} + \frac{x^2+3}{\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{2x(2x+1)+x^2+3}{\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{5x^2+2x+3}{\sqrt{2x+1}} \quad 【5\text{ 点}】$$

(9) $y = \log(\cos x)$

$$y' = -\tan x \quad 【5\text{ 点}】$$

(10) $y = \sin^2 x$

$$y' = 2\sin x\cos x \quad 【5\text{ 点}】$$

(11) $y = \tan^{-1}(2x)$

$$y' = \frac{2}{1+4x^2} \quad 【5\text{ 点}】$$

(12) $y = (x^2+2x)\tan(3x^2+8)$

$$y' = 2(x+1)\tan(3x^2+8) + \frac{6x^2(x+2)}{\cos^2(3x^2+8)} \quad 【5\text{ 点}】$$

4 対数微分法を用いて，$y = \dfrac{(x+1)\sqrt{x+5}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ を微分しなさい．

$$\log y = \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x+5) - \log(x+2) - \frac{1}{2}\log(x+3)$$

(1 点)

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} \quad (2\text{ 点})$$
$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(x+5)(x+3)}$$
$$= \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+5)(x+3)}$$
$$= \frac{8x+15-(3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+5)(x+3)}$$
$$= \frac{5x+13}{(x+1)(x+2)(x+5)(x+3)}$$
$$\therefore\ y' = y\cdot\frac{5x+13}{(x+1)(x+2)(x+5)(x+3)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{5x+13}{(x+2)^2(x+3)^{3/2}\sqrt{x+5}}} \quad 【5\text{ 点}】$$

5 関数 $f(x) = x^3-3x^2-9x+6$ が単調増加となる x の範囲を求めなさい．

$$f'(x) = 3x^2-6x-9 = 3(x-3)(x+1)$$

よって，$x = -1, 3$ で $f(x)$ の増減が切り替わる可能性がある．増減表をつくると，$x < -1, 3 < x$ で $f(x)$ は単調増加であり，$-1 < x < 3$ で単調減少であることがわかる．【5 点】

- 不正解でも，増減表が正しくかけていれば 3 点．
- 一方の範囲のみの場合は 1 点．

※ $\boxed{6}$ と $\boxed{7}$ は選択問題です．どちらか一方にのみ答えなさい．

6 逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ の定義を述べなさい．また，逆関数の定義と合成関数の微分の公式を用いて，

$$\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

を示しなさい．

7 Taylor 級数の定義式を述べなさい．さらにその定義式に基いて，$x = 0$ における $\sin x$ の Taylor 級数を求めなさい．

教科書およびノートを確認せよ．【15 点】（部分点なし）

$\boxed{6}$ のポイント

- $\sin^{-1}$ の定義域と値域について言及している．
- 逆関数の微分の公式を用いて導いている．

$\boxed{7}$ のポイント

- Taylor 級数の定義を書いている．
- $f(x) = \sin x$ に対し，$f^{(n)}(x)$ を求めている．