科 目 名 微分方程式　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 変数分離形微分方程式 $y' = 2xy$ の一般解を求めなさい．

方程式は

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \iff \frac{1}{y}dy = 2x\,dx$$

と変形できるので，これは変数分離形である．両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx \quad 【1点】$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log y = x^2 + c}$$

を得る（$\boldsymbol{y = C\,e^{x^2}}$ でもよい）．【1点】

2 変数分離形微分方程式 $y^2\,dx + x\,dy = 0$ の解で，初期条件 $(x, y) = (1, 1)$ を満たす特殊解を求めなさい．

$$\frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{x}dx$$

と変数を分離し，両辺を積分する．

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{y} = -\log x + c$$

$$\therefore\quad y = \frac{1}{\log x + C}$$

または，$y(\log x + C) = 1$ でもよい．【1点】
初期条件より，$1 \times (0 + C) = 1$，つまり $C = 1$ である．よって，この場合の特殊解は $\boldsymbol{y(\log x + 1) = 1}$ である．【1点】

3 $xy' = 2y + \sqrt{2x^2 + y^2}$ が同次形であることを示しなさい．

両辺を x で割れば，$y' = 2\cdot\dfrac{y}{x} + \sqrt{2 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ となる．$f(t) = 2t + \sqrt{2 + t^2}$ とおけば，上の方程式は $y' = f(y/x)$ と書けるので，同次形である．【2点】

4 同次形微分方程式 $xy\,dy - (x^2 + y^2)\,dx = 0$ を適当に変数変換して，変数分離形微分方程式に直しなさい．

方程式の両辺を x^2 で割ると

$$\frac{y}{x}y' - \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} = 0.$$

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xz)' = z + x\,z'$ である．【1点】
これらを代入すると

$$\begin{aligned} & z(z + x\,z') - (1 + z^2) = 0 \\ \iff & xzz' - 1 = 0 \\ \iff & z\,dz = \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

と変数が分離できる．【2点】

学籍番号	1						学科	
氏名								

5 線形微分方程式 $xy' + y = x(1+2x^2)$ の解を求めよ.

方程式の両辺を x で割ると

$$y' + \frac{1}{x}y = 1 + 2x^2$$

となり，これは線形微分方程式である.
$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1 + 2x^2$ とおくと，

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \log x.$$

$$\int e^{\log x}(1+2x^2)\,dx = \int x(1+2x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + x^4).$$

よって，解は

$$y = e^{-\log x}\left(\frac{1}{2}(x^2+x^4) + c\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}(x^2+x^4) + c\right)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{2xy = x^2 + x^4 + C} \quad 【2 点】$$

6 ベルヌーイの微分方程式 $y' + y = xy^2$ を適当に変数変換して，線形微分方程式に直しなさい.

この方程式は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式である.
$z = y^{-1} = \frac{1}{y}$ とおくと，$z' = -\frac{1}{y^2}y'$ である.【1 点】
$y' = -y^2 z'$ を代入すると，

$$-y^2 z' + y = xy^2 \iff z' - \frac{1}{y} = -x$$
$$\iff z' - z = -x$$

となり，これは z に関する線形微分方程式である.【2 点】

7 微分方程式 $\{(x^2 - 2y)\,dx + (y^2 - 2x)\,dy = 0$ が完全であることを確かめ，解を求めなさい.

$P(x,y) = x^2 - 2y$, $Q(x,y) = y^2 - 2x$ とおくと，

$$P_y = -2 = Q_x$$

が成り立つので，この微分方程式は完全である.【1 点】
よって，解は

$$\int_0^x P(t,y)\,dt + \int_0^y Q(0,t)\,dt = c$$
$$\iff \int_0^x (t^2 - 2y)\,dt + \int_0^y (t^2 - 2\times 0)\,dt = c$$
$$\iff \left[\frac{t^3}{3} - 2yt\right]_0^x + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y = c$$
$$\iff \frac{x^3}{3} - 2xy + \frac{y^3}{3} = c$$
$$\iff \boldsymbol{x^3 - 6xy + y^3 = C} \quad 【2 点】$$

学籍番号	1						学科		
氏名									