科 目 名 微分方程式 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 同次形微分方程式

$$xyy' - (x^2 + y^2) = 0 \qquad (*)$$

について次の問に答えなさい.

(1) 適当な変数変換により, $(*)$ は変数分離形

$$xzz' = 1$$

に変換されることを示しなさい.

方程式の両辺を x^2 で割ると

$$\frac{y}{x}y' - \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} = 0.$$

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y' = (xz)' = z + x\,z'$ である.
これらを代入すると

$$z(z + x\,z') - (1 + z^2) = 0$$
$$\iff xzz' - 1 = 0$$

となる. 【5 点】

(2) $(*)$ の一般解を求めなさい.

(1) の変数分離形微分方程式を解く.

$$xzz' = 1 \iff xz\frac{dz}{dx} = 1 \iff z\,dz = \frac{1}{x}dx \quad (2\text{ 点})$$

であるから, この式の両辺を積分すると

$$\int z\,dz = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \frac{z^2}{2} = \log x + c = \log Cx \quad (2\text{ 点})$$

よって, **(??)** の一般解は

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{x^2} = 2\log Cx} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{y^2 = 2x^2\log Cx}$$

である. 【10 点】

2 微分方程式

$$y' + y = xy^2 \qquad (\sharp)$$

について, 次の問に答えなさい.

(1) 適当な変数変換により, $(\sharp)$ は線形微分方程式

$$z' - z = -x$$

に変換されることを示しなさい.

この方程式は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式である. $z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ とおくと, $z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$ である.
$y' = -y^2\,z'$ を $(\sharp)$ に代入すると,

$$-y^2\,z' + y = xy^2 \iff z' - \frac{1}{y} = -x$$
$$\iff z' - z = -x$$

となり, これは z に関する線形微分方程式である. 【5 点】

(2) $(\sharp)$ の一般解を求めなさい.

線形微分方程式

$$z' - z = -x$$

の一般解を求める.
$P(x) = -1$, $Q(x) = -x$ とおくと,

$$\int P(x)\,dx = -\int dx = -x.$$

$$\int e^{-x}(-x)\,dx = -\int x\,e^{-x}\,dx = \int x\,\left(e^{-x}\right)'\,dx$$
$$= x\,e^{-x} - \int e^{-x}\,dx$$
$$= x\,e^{-x} + e^{-x}$$
$$= e^{-x}(x+1).$$

よって, 一般解は

$$z = e^x\left(e^{-x}(x+1) + C\right) = (x+1) + Ce^x. \quad 【5\text{ 点}】$$

v 以上のことから, $(\sharp)$ の一般解は

$$y = \frac{1}{(x+1) + Ce^x}$$

であることがわかる. 【5 点】

$\boxed{3}$ 微分方程式

$$(x^2+3xy)\,dx+(3x^2-xy)\,dy=0 \qquad (\dagger)$$

について, 次に問に答えなさい.

(1) $(\dagger)$ が完全でないことを示しなさい.

$P(x,y)=x^2+3xy,\ Q(x,y)=3x^2-xy$ とおくと, $(\dagger)$ は

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

と書ける. このとき,

$$P_y=3x\neq 6x-y=Q_x$$

であるから, $(\dagger)$ は完全ではない.【5 点】

(2) $g=\dfrac{1}{x}$ が $(\dagger)$ の積分因子であることを示しなさい.

$(\dagger)$ の両辺に $\dfrac{1}{x}$ をかけると

$$(x+3y)\,dx+(3x-y)\,dy=0$$

となる. $\bar{P}(x,y)=\dfrac{P}{x}=x+3y,\ \bar{Q}(x,y)=\dfrac{Q}{x}=3x-y$ とおくと

$$\bar{P}_y=3=\bar{Q}_x$$

となり, $\bar{P}\,dx+\bar{Q}\,dy=0$ は完全微分方程式になる. よって, $\dfrac{1}{x}$ が積分因子であることがわかる.【5 点】

(3) $(\dagger)$ の一般解を求めなさい.

$\bar{P}\,dx+\bar{Q}\,dy=0$ の一般解を求める.

$$\begin{aligned} c&=\int_0^x \bar{P}(t,y)\,dt+\int_0^y \bar{Q}(0,t)\,dt\\ &=\int_0^x (t+3y)\,dt+\int_0^y (3\cdot 0-t)\,dt \quad 【2 点】\\ &=\left[\frac{1}{2}t^2+3yt\right]_0^x-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^y\\ &=\frac{1}{2}x^2+3xy-\frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

よって, 一般解は

$$\boldsymbol{x^2+6xy-y^2=C}$$

である.【8 点】

$\boxed{4}$ 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $y''-6y'+9y=0$

$\boxed{4}$ については,

- 補助方程式を書いていれば部分点【3 点】加点する.
- 補助方程式の解は間違えているが, 一般解の形を理解していると思われる場合は, さらに【3 点】加点する.

補助方程式は

$$0=t^2-6t+9=(t-3)^2$$

となり, これは重解 $t=3$ をもつので, 一般解は

$$\boldsymbol{y=(c_1+c_2x)e^{3x}}$$

である.【10 点】

(2) $y''+7y'+12y=0$

補助方程式は

$$0=t^2+7t+12=(t+3)(t+4)$$

となり, これは異なる 2 つの実数解 $t=-3,-4$ をもつので, 一般解は

$$\boldsymbol{y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}}$$

である.【10 点】

(3) $y''+2y'+5y=0$

補助方程式は

$$t^2+2t+5=0$$

となり, これは実数解を持たず, 解は $t=-1\pm 2i$ である. よって, 一般解は

$$\boldsymbol{y=e^{-x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)}$$

である.【10 点】

$\boxed{5}$ 定数係数線形微分方程式

$$y'' + 2y' - 3y = x + 1$$

の一般解を求めなさい.

まず, 定数係数線形同次微分方程式

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

の一般解を求める. 補助方程式は

$$0 = t^2 + 2t - 3 = (t+3)(t-1)$$

となり, 2 つの異なる実数解 $t = 1, -3$ をもつので, 一般解は

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

である【6 点】. 次に

$$y'' + 2y' - 3y = x + 1$$

の特殊解を逆演算子の計算により求める. この微分方程式は

$$(D^2 + 2D - 3)y = x + 1$$

と書けるので, 特殊解は

$$\frac{1}{D^2 + 2D - 3}(x+1)$$

によって求めることができる. これを演算子の展開の方法を用いて計算する.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D^2 + 2D - 3}(x+1) \\
=&\frac{1}{(D+3)(D-1)}(x+1) \\
=&-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{3})}\cdot\frac{1}{1-D}(x+1) \\
=&-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{3})}\cdot(1+D+D^2+\cdots)(x+1) \\
=&-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{3})}(x+1+1) \\
=&-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{3})}(x+2) \qquad (3\text{ 点}) \\
=&-\frac{1}{3}\cdot\left\{1+\left(-\frac{D}{3}\right)+\left(-\frac{D}{3}\right)^2+\cdots\right\}(x+2) \\
=&-\frac{1}{3}\left(x+2-\frac{1}{3}\right) \\
=&-\frac{1}{9}(3x+6-1) = -\frac{1}{9}(3x+5). \qquad \text{【6 点】}
\end{aligned}$$

よって, 求める一般解は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{9}(3x+5) + c_1 e^x + c_2 e^{-3x}}$$

である【12 点】.