科 目 名 応用数学 **II-J** 出 題 者 名 佐藤 弘康

**1** 変数分離形微分方程式 $y' = -2xy$ の一般解を求めなさい．

方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \iff \frac{1}{y}dy = -2x\,dx \quad【1 点】$$

と変形できるので，これは変数分離形である．両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int 2x\,dx \quad【1 点】$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log y = -x^2 + c} \quad【2 点】$$

を得る（$\boldsymbol{y = C\,e^{-x^2}}$ や $\boldsymbol{e^{x^2}y = C}$ でもよい）．ただし，任意定数がない場合は 1 点減点する．

**2** 変数分離形微分方程式 $y^3\,dx - x^2\,dy = 0$ の解で，初期条件 $(x, y) = (1, 1)$ を満たす特殊解を求めなさい．

$$\frac{1}{y^3}dy = \frac{1}{x^2}dx \quad【1 点】$$

と変数を分離し，両辺を積分する．

$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int \frac{1}{x^2}dx \quad【1 点】$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} + c \quad【1 点】$$

または，$y^2(2 + Cx) - x = 0$ でもよい．
初期条件より，$2 - 1 + C = 0$．よって，$C = -1$ である．よって，この場合の特殊解は $\boldsymbol{(x-2)y^2 + x = 0}$ である．【1 点】

**3** 次の (1)〜(4) の中から同次形の微分方程式を 1 つ選びなさい．

(1) $x^2y' = y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $xy' = 2y + \sqrt{2x^2 + y^2}$

(4) $xy' = y + \sqrt{x^2 + 3}$

(3) が同次形である．【4 点】

**4** 同次形微分方程式 $xy\,dy - (x^2 + y^2)\,dx = 0$ を適当に変数変換して，変数分離形微分方程式に直しなさい．

方程式の両辺を $x^2$ で割ると

$$\frac{y}{x}y' - \left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} = 0.$$

$z = \dfrac{y}{x}$ とおく【1 点】と，$y' = (xz)' = z + x\,z'$【1 点】である．これらを代入すると

$$\begin{aligned} &z(z + x\,z') - (1 + z^2) = 0 \\ \iff\ & xzz' - 1 = 0 \\ \iff\ & z\,dz = \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

と変数が分離できる．【2 点】

$\boxed{\mathbf{5}}$ 線形微分方程式 $xy' + y = x(1+2x^2)$ の解を求めよ．

方程式の両辺を $x$ で割ると

$$y' + \frac{1}{x}y = 1 + 2x^2$$

となり，これは線形微分方程式である.【1 点】
$P(x) = \dfrac{1}{x}$，$Q(x) = 1 + 2x^2$ とおくと，

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}dx = \log x. \quad【1 点】$$

$$\begin{aligned}\int e^{\log x}(1+2x^2)\,dx &= \int x(1+2x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2+x^4). \quad【1 点】\end{aligned}$$

よって，解は

$$\begin{aligned} y &= e^{-\log x}\left(\frac{1}{2}(x^2+x^4)+c\right) \quad【1 点】\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}(x^2+x^4)+c\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{2xy = x^2 + x^4 + C} \quad【2 点】$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ ベルヌーイの微分方程式 $y' + y = xy^2$ を適当に変数変換して，線形微分方程式に直しなさい．

この方程式は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式である【1 点】.
$z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ とおくと【1 点】，$z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$ である【1 点】.
$y' = -y^2 z'$ を代入すると，

$$\begin{aligned} -y^2 z' + y = xy^2 &\iff z' - \frac{1}{y} = -x \\ &\iff z' - z = -x\end{aligned}$$

となり，これは $z$ に関する線形微分方程式である.【3 点】

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の各微分方程式に対し，完全ならば解を求め，完全でないならば積分因子を求めなさい．

(1) $\{(x^2-2y)\,dx+(y^2-2x)\,dy=0$

$P(x,y)=x^2-2y,\ Q(x,y)=y^2-2x$ とおくと，

$$P_y=-2=Q_x \quad 【1\text{点}】$$

が成り立つので，この微分方程式は完全である．【2 点】
よって，解は

$$\begin{aligned} &\int_0^x P(t,y)\,dt+\int_0^y Q(0,t)\,dt=c \quad 【1\text{点}】\\ \iff &\int_0^x (t^2-2y)\,dt+\int_0^y (t^2-2\times 0)\,dt=c \\ \iff &\left[\frac{t^3}{3}-2yt\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y=c \\ \iff &\frac{x^3}{3}-2xy+\frac{y^3}{3}=c \\ \iff &\boldsymbol{x^3-6xy+y^3=C} \quad 【2\text{点}】\end{aligned}$$

(2) $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$

$P(x,y)=x^2+y^2,\ Q(x,y)=-2xy$ とおくと，

$$P_y=2y\neq -2y=Q_x \quad 【1\text{点}】$$

であるから，この微分方程式は完全ではない．【2 点】
ここで，

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{4y}{2xy}=-\frac{2}{x}【1\text{点}】$$

となり，これは $y$ には依存しない，$x$ の関数である．よって，積分因子は

$$e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}$$

である．【1 点】ここで

$$\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx=-2\int\frac{1}{x}dx=-2\log x$$

であるから【1 点】，積分因子は

$$e^{-2\log x}=x^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$$

である．【1 点】