科 目 名 応用数学 **II-J** 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 $f(t)=(t+3)(t-2), y=e^{2x}+\sin x$ とする．このとき，$f(D)y$ を求めなさい．【6 点】

$$\begin{aligned} f(D)y =&(D+3)(D-2)\left[e^{2x}+\sin x\right] \\ =&(D+3)(D-2)\left[\sin x\right] \\ =&(D+3)\left[\cos x-2\sin x\right] \\ =&-\sin x-2\cos x+3\cos x-6\sin x \\ =&\boldsymbol{\cos x-7\sin x}. \end{aligned}$$

2 次の (1)〜(4) 中から **2** 階線形微分方程式を すべて 選びなさい．【6 点】

(1) $y''+xy'=e^{2x}$

(2) $y''-y'+2y^2=0$

(3) $y'+3y=\sqrt{2x^2+1}$

(4) $y''+4y=\sin 3x$

(1) と (4)

（上記の 2 つを選んだ場合以外に，正しいものを少なくとも 1 つ選んでいて，かつ正しくないものを多くても 1 つ選んでいる場合は部分点【3 点】加点する）

ちなみに

(2) は y^2 の項があるので，線形ではない．

(3) は 1 階線形微分方程式である．

3 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい．【各 6 点】

(1) $y''-6y'+9y=0$

補助方程式は

$$0=t^2-6t+9=(t-3)^2$$

となり，これは重解 $t=3$ をもつので（2 点），一般解は

$$\boldsymbol{y=(c_1+c_2x)e^{3x}}$$

である．

(2) $y''+7y'+12y=0$

補助方程式は

$$0=t^2+7t+12=(t+3)(t+4)$$

となり，これは異なる 2 つの実数解 $t=-3,-4$ をもつので（2 点），一般解は

$$\boldsymbol{y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}}$$

である．

(3) $y''+2y'+5y=0$

補助方程式は

$$t^2+2t+5=0$$

となり，これは実数解を持たず，解は $t=-1\pm 2i$ である（2 点）．よって，一般解は

$$\boldsymbol{y=e^{-x}(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)}$$

である．

4 次の計算をしなさい.【各 5 点】

(1) $\dfrac{1}{D^2+3D+2}e^{-3x}$

逆演算子の性質

$$f(\alpha)\neq 0 \text{ ならば, } \frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$$

を用いることにより,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2+3D+2}e^{-3x} &=\frac{1}{(-3)^2+3\times(-3)+2}e^{-3x}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-3x}}\end{aligned}$$

を得る.

(2) $\dfrac{1}{D^2-D-2}\sin x$

$$\frac{1}{D^2-D-2}e^{ix}=\frac{1}{D^2-D-2}(\cos x+i\,\sin x).$$

一方,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2-D-2}e^{ix} &=\frac{1}{i^2-i-2}e^{ix} \quad (2\text{ 点})\\ &=-\frac{1}{3+i}(\cos x+i\,\sin x)\\ &=-\frac{3-i}{10}(\cos x+i\,\sin x). \quad (2\text{ 点})\end{aligned}$$

よって, 2 式の虚部を比較することにより,

$$\frac{1}{D^2-D-2}\sin x=\boldsymbol{\frac{1}{10}(\cos x-3\sin x)}$$

を得る. (1 点)

(3) $\dfrac{1}{D^2-D-2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2-D-2}e^{-2x} &=\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D+1}e^{2x}\\ &=\frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{2+1}e^{2x}\\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{D-2}e^{2x} \quad (3\text{ 点})\\ &=\frac{1}{3}e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}\,dx\\ &=\frac{1}{3}e^{2x}\int dx\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{3}x\,e^{2x}}.\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{1}{D^2+D-2}(x+1)$

逆演算子の展開の方法を用いる.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{D^2+D-2}(x+1)\\ &=\frac{1}{(D+2)(D-1)}(x+1)\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{2})}\cdot\frac{1}{1-D}(x+1)\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{2})}\cdot(1+D+D^2+\cdots)(x+1)\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{2})}(x+1+1)\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{D}{2})}(x+2) \quad (3\text{ 点})\\ &=-\frac{1}{2}\cdot\left\{1+\left(-\frac{D}{2}\right)+\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\cdots\right\}(x+2)\\ &=-\frac{1}{2}\left(x+2-\frac{1}{2}\right)\\ &=-\frac{1}{4}(2x+4-1)\\ &=\boldsymbol{-\frac{1}{4}(2x+3)}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 定数係数線形微分方程式

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$$

の一般解を求めなさい．【10 点】

まず, 定数係数線形同次微分方程式

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は

$$0 = t^2 + 3t - 4 = (t+4)(t-1)$$

となり, 2 つの異なる実数解 $t = 1, -4$ をもつので, 一般解は

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$$

である．【4 点】
次に

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$$

の特殊解を逆演算子の計算により求める．この微分方程式は

$$(D^2 + 3D - 4)y = e^{-4x}$$

と書けるので, 特殊解は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2+3D-4}e^{-4x} &= \frac{1}{D+4} \cdot \frac{1}{D-1}e^{-4x} \\
&= \frac{1}{D+4} \cdot \frac{1}{-4-1}e^{-4x} \\
&= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{D-(-4)}e^{-4x} \quad (2\text{ 点}) \\
&= -\frac{1}{5}e^{-4x} \int e^{4x}e^{-4x}\,dx \\
&= -\frac{1}{5}e^{-4x} \int dx \\
&= -\frac{1}{5}x\,e^{-4x}. \quad 【4\text{ 点}】
\end{aligned}$$

よって, 求める一般解は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{5}x\,e^{-4x} + c_1 e^x + c_2 e^{-4x}}$$

である．【2 点】