1 次の行列式を求めなさい.

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

【5 点】-11

(2) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ 【5 点】216

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 【5 点】-45

2 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

【5 点】3

(2) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3〜5 個の成分が正しい場合【 5 点】
6〜8 個の成分が正しい場合【10 点】
すべての成分が正しい場合【15 点】

(3) $A\widetilde{A}$ を求めなさい.

【5 点】$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（補足）任意の正方行列 A に対して

$$A\widetilde{A} = |A|\,E$$

が成り立つ.

(4) (1)(2)(3) の結果を利用して逆行列 A^{-1} を求めなさい.

【5 点】$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

（補足）$A\widetilde{A} = |A|\,E$ より，$|A| \neq 0$ ならば，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

である.

3 次の各問に答えなさい．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 1 次変換による点 $(1, 2)$ の像を求めなさい．

【5 点】$(1, 4)$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 1 次変換による点 P の像が $(1, 3)$ であるとき，P の座標を求めなさい．

【5 点】$(2, 1)$

（補足）行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 1 次変換を f とおくとき，点 P は，点 $(1, 3)$ の f^{-1} による像である．f^{-1} は f の逆変換であるから，その行列は A の逆行列 A^{-1} である．

(3) 原点を中心に反時計回りに 120° 回転させる行列を書きなさい．

【5 点】$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

（補足）原点を中心に反時計回りに角 θ だけ回転させる 1 次変換の行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である．

4 直交行列の定義を書きなさい．

【5 点】${}^tA\,A = E$ を満たす正方行列 A のこと．

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

【5 点】1 と -1

(2) (1) で求めた各固有値に対し，固有ベクトルを求めなさい．

【各 5 点】

1 に関する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

-1 に関する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

（k は 0 でない実数）

(3) A^{101} を求めなさい．

【5 点】$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

（解）(1)(2) の結果より，A の固有ベクトルを並べた行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対し，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで，

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

であるから，

$$(P^{-1}AP)^{101} = P^{-1}A^{101}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$A^{101} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

を得る（$A^2 = E$ より，$A^{101} = A$ と解答してもよい）．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 平面の 1 次変換 f は次の 3 つの条件を満たすとする;

(i) f によって直線 $x+2y+3=0$ は直線 $x+2y=0$ に移る.

(ii) f によって直線 $2x-y-3=0$ 上のすべての点はある 1 点に移る.

(iii) 点 $(1,0)$ の f による像の x 座標は 2 である.

このとき，f の行列 M を求めなさい.

【15 点】$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

（解）$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

条件 (i)：直線 $x+2y+3=0$ 上の点は $(-2t-3,t)$（ただし，t は任意の実数）とおくことができる．この点の f による像は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t-3 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2a+b)t-3a \\ (-2c+d)t-3c \end{pmatrix}$$

である．これが直線 $x+2y=0$ 上の点となるので，任意の t の対して

$$\{(-2a+b)t-3a\}+2\{(-2c+d)t-3c\}=0$$

が成り立つ（t の関する恒等式）．したがって，$\underline{\boldsymbol{a=-2c}}$, $\underline{\boldsymbol{b=-2d}}$ を得る.

条件 (ii)：直線 $2x-y-3=0$ 上の点は $(s,2s-3)$（ただし，s は任意の実数）とおくことができる．この点の f による像は,

$$\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 2s-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2(c+2d)s+6d \\ (c+2d)s-3d \end{pmatrix}$$

である．これがただ 1 点であるためには，s の係数が 0 になればよい．したがって，$\underline{\boldsymbol{c+2d=0}}$ を得る.

条件 (iii)：

$$\begin{pmatrix} 4d & -2d \\ -2d & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4d \\ -2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ * \end{pmatrix}$$

より，$\underline{\boldsymbol{d=\frac{1}{2}}}$ を得る.

以上により，$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ となる.