科 目 名 線形代数学II　　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - (-3) \times 2$

$= 5 - (-6) = \underline{11}$ (1)

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

$= 12 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 24(-3 \times 2 \times 1 - 3 \times 1 \times 1)$

$= 24 \times (-9) = \underline{-216}$ (1)

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3 \times (1 \times 5 - 2 \times 10)$

$= 3 \times (-15) = \underline{-45}$ (2)

2 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 \times (-1) = \underline{-2}$ (1)

(2) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めなさい．

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (1〜3)

(コメント)

・上の行列を転置した行列を書いたもの故人.

・$A\widetilde{A} = |A|E$ が成り立つので検算が可能

(3) $A\widetilde{A}$ を求めなさい．

$A\widetilde{A} = |A|E = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (1)

(4) (1)(2)(3) の結果を利用して逆行列 A^{-1} を求めなさい．

$|A| \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ である

$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (1)