科 目 名 微分積分学II　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 関数 $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 100$ が，$f(x) = x^2$ の原始関数か否か，判定しなさい．

$$F(x)' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 100\right)' = \frac{1}{3} \times 3 \times x^{3-1}$$

$$= x^2 = f(x)$$

したがって，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。

2 次の不定積分を求めなさい．

(1) $\int (x^2 - 6x + 5)\,dx$

$$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} - 6 \times \frac{1}{1+1}x^{1+1} + 5x + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + C$$

(2) $\int (3x-2)^4\,dx$

$$= \frac{1}{4+1}(3x-2)^{4+1} \times \frac{1}{3} + C$$

$$= \frac{1}{15}(3x-2)^5 + C$$

(3) $\int \frac{dx}{x^2}$

$$= \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

(4) $\int e^{3x}\,dx$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

(5) $\int \sin(3x-4)dx$

$$= -\cos(3x-4) \times \frac{1}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x-4) + C$$

(6) $\int x e^{x^2}\,dx$　　$x^2 = t$ とおくと $2x\,dx = dt$

$$= \frac{1}{2}\int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

(7) $\int x^2 e^{2x}\,dx$ $= \int x^2 \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$

$$= x^2 \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int 2x \times \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int x \times \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left\{\frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1) + C$$

(8) $\int \sin^3 x\,dx$

$$= \int \sin x(1 - \cos^2 x)dx$$

$$= \int \sin x\,dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\int (\cos^3 x)'\,dx$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

3 $I = \int e^x \cos 3x\,dx$ を求めなさい．

$$I = \int (e^x)' \cos 3x = e^x \cos 3x - \int e^x \cdot (-3\sin 3x)dx$$

$$= e^x \cos 3x + 3\int (e^x)' \sin 3x\,dx$$

$$= e^x \cos 3x + 3e^x \sin 3x - 3\int e^x \cdot 3\cos 3x\,dx$$

$$= e^x(\cos 3x + 3\sin 3x) - 9I$$

$$\therefore\ 10I = e^x(\cos 3x + 3\sin 3x)$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{10}e^x(\cos 3x + 3\sin 3x)$$