微分積分学 II（web 補講）

無理関数の不定積分

担当：佐藤 弘康

1. （復習）有理関数とは

有理関数

- 「多項式の分数」の形をした関数.

  例 $\dfrac{x^2+3}{2x-1}$

- 「変数と定数の四則演算」によって表される関数.

  例 $\dfrac{x^2+3}{2x-1} = (x \times x + 3) \div (2 \times x - 1)$

2. 無理関数とは

無理関数

- 「変数と定数の四則演算」および「根号（平方根や冪根）」によって表される関数.

  例 $(x^2+2)\sqrt{2-3x}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x^2+3+\sqrt{x^2+1}, \ldots$

- 根号の中に少なくとも１つの変数を含まなくてはならない

  例 $x^2+3+\sqrt{2}$ は無理関数ではない

3. （復習）有理関数の不定積分

積分できる形に有理式を変形

- **多項式の除法**

$$\int \frac{x^2+x+2}{x^2+1}dx = \int \left(x + \frac{2}{x^2+1} \right) dx$$

- **部分分数分解**

$$\int \frac{x+7}{(x+1)(x+3)}dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

4. 無理関数の不定積分

ケース・バイ・ケース

（置換積分によって有理関数の積分に帰着させる）

例題 $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,dx$ を求めよ.

（ヒント）$t = \sqrt{x+3}$ とおくと,

- $x = t^2 - 3$
- $\dfrac{dx}{dt} = \left(t^2 - 3\right)' = 2t$ より，$dx = 2t\,dt$

したがって,

$$\int x\sqrt{x+3}\,dx = \int \left(t^2 - 3\right) \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int t^2\left(t^2 - 3\right)dt$$

となり，有理関数の不定積分になる（詳細は p.121 例題 1(2)）.

公式 第 4 章 §4.2（教科書 p.140, 141）

- [I] (i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

- [I] (ii)

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)$$

- [II]

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

公式　第 4 章 §4.2（教科書 p.140, 141）

- [I] (i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

この不定積分は，$t = x + \sqrt{x^2+A}$ と置換することにより，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| = \log|x+\sqrt{x^2+A}|$$

となる．

本講義では，次の公式について説明する；

第 4 章 §1.2 [V] (ii)（教科書 p.117）

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

ここで，$g(x) = \sin^{-1} x$ とは，

「正弦関数 $f(x) = \sin x$ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数」

とみなしたときの逆関数のこと．つまり . . .

- $y = \sin x$ ならば，$\sin^{-1} y = x$ となる関数である．
- $g(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ 上で定義された関数で，その値の範囲は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq g(x) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である．

第 4 章 §1.2 [V] (ii)（教科書 p.117）

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

- 逆関数のついては，第 2 章 §4.1（教科書 p.53）
- 逆正弦関数については，第 2 章 §4.2（教科書 p.56）

を参照せよ．

第 4 章 §1.2 [V] (ii)（教科書 p.117）

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

証明

- $1 - x^2 > 0$ より，$-1 < x < 1$ である．
- そこで，$x = \sin t$ として置換積分をする．
- $\dfrac{dx}{dt} = (\sin t)' = \cos t$ より，$dx = \cos t\,dt$．
- $-1 < \sin t < 1$ より，
  $\sin t$ を $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数と考える．
  （このとき，$\cos t > 0$ である）

以上のことから，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cdot \cos t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{|\cos t|} \cdot \cos t\,dt \quad \text{（一般に } \sqrt{a^2} = |a| \text{ である）}$$

$$= \int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t\,dt \quad \text{（}\cos t > 0 \text{ より）}$$

$$= \int dt = t + C.$$

ここで，$x = \sin t$ より，$t = \sin^{-1} x$ であるので，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C.$$

5. 例題と問題演習

例題A $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ を求めよ.

(解) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx$

$2x = t$ として置換積分する. $2\,dx = dt$ であるから,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} t + C = \underline{\frac{1}{2}\sin^{-1} 2x + C}.$$

5. 例題と問題演習

例題 B $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ を求めよ.

(解) $$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx$$

$\dfrac{x}{2} = t$ として置換積分する. $\dfrac{1}{2}\,dx = dt$ であるから,

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot 2\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \sin^{-1} t + C = \underline{\sin^{-1}\frac{x}{2} + C}.$$

5. 例題と問題演習

$\boxed{\text{問題演習}}$ 教科書 p.118 <u>問 1 (3) (4)</u>, <u>問 2 (3) (4)</u>

さらに,

教科書 p.140 の例題 1 を参考にして, <u>問 1</u>