科 目 名 微分積分学 II 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 関数 $F(x) = 3x^2 + 2014$ が，$f(x) = x^3$ の原始関数か否か，判定しなさい（理由も述べること）.

【5 点】原始関数ではない.

理由：$F'(x) = 6x \neq f(x)$ だから.

2 次の不定積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int (x^2 - 6x + 5)\, dx$

【5 点】$\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + C$

(2) $\displaystyle\int (3x - 2)^4\, dx$

【5 点】$\dfrac{1}{15}(3x - 2)^5 + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\, dx$

【5 点】$-\dfrac{1}{2x^2} + C$

(4) $\displaystyle\int e^{3x}\, dx$

【5 点】$\dfrac{1}{3}e^{3x} + C$

(5) $\displaystyle\int \cos(4x - 3)dx$

【5 点】$\dfrac{1}{4}\sin(4x - 3) + C$

(6) $\displaystyle\int x\, e^{x^2}\, dx$

【5 点】$\dfrac{1}{2}e^{x^2} + C$

(7) $\displaystyle\int x^2\, e^x\, dx$

【5 点】$(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(8) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx$

【5 点】$\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x + C$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 7}{(x + 1)(x - 2)^2}\, dx$

【5 点】$\log|x + 1| - \dfrac{3}{x - 2} + C$

- 部分分数分解ができているか（3 点）

$\boxed{\mathbf{3}}$ $I = \int e^x \cos 2x \, dx$ を求めなさい．

【5点】$I = \dfrac{1}{5}e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) + C$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の定積分を求めなさい．

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2x+1}\,dx$

【5点】$\dfrac{1}{2}\log 3$

(2) $\displaystyle\int_3^5 x\sqrt{x-3}\,dx$

【5点】$\dfrac{28\sqrt{2}}{5}$

- 変数変換をしている（1点）
- dx を正しく変換している（1点）
- 積分区間を正しく変換している（1点）
- 以上を正しく代入して置換積分している（1点）
- 正しく計算できている（1点）

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - \cos x\, \sin x)\,dx$

【5点】0

理由：被積分関数が奇関数だから．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の広義積分は存在するか．存在すれば求めなさい．存在しない場合は理由を述べなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

【5点】$2\sqrt{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

【5点】存在しない．

理由：$\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \log x$ は収束しないから．

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

【5点】$\dfrac{1}{3}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件を満たすとする;

(i) $f'(x) = 2x\ \sin x + x^2\ \cos x + x^2 + 2$,

(ii) $f(x)$ は奇関数.

このとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = \pi$ で囲まれる図形の面積を求めなさい.

【15 点】$\dfrac{\pi^4}{12} + 2\pi^2$

（解） 条件 (i) より，$f(x)$ は $2x\ \sin x + x^2\ \cos x + x^2 + 2$ の原始関数なので，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2x\ \sin x + x^2\ \cos x + x^2 + 2)\, dx \\ &= x^2\ \sin x + \frac{1}{3}x^3 + 2x + C \end{aligned}$$

である．条件 (ii) より，$f(x)$ は奇関数だから，$f(0) = 0$ を満たす．つまり，

$$f(x) = x^2\ \sin x + \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

である．

$$f(x) = x(x\ \sin x + \frac{1}{3}x^2 + 2)$$

と書けるので，$y = f(x)$ のグラフが原点で x 軸と交わることは明らかである．では，このグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で原点以外に x 軸と交点を持つだろうか．この範囲で $\sin x \geqq 0$, $\cos x \geqq -1$ であるから，

$$f'(x) = 2x\ \sin x + x^2(1 + \cos x) + 2 \geqq 2 > 0$$

となり，$f(x)$ が増加関数であることがわかる．したがって，$y = f(x)$ のグラフは $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で原点以外に x 軸と交点を持たない．以上のことから，求める面積 S は

$$S = \int_0^{\pi} \left(x^2\ \sin x + \frac{1}{3}x^3 + 2x\right) dx$$

である（積分計算は右を参照）.

- $f(x)$ を導きだす際に「$f(x)$ が奇関数である」ことを言及している（4 点）
- $f(x)$ を正しく導きだしている（5 点）
- 積分区間を $0 \leqq x \leqq \pi$ にしている（1 点）
- 面積が正しく計算できている（5 点）

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} x^2\ \sin x\, dx + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} x^2\,(-\cos x)'\, dx + \left[\frac{1}{12}x^4 + x^2\right]_0^{\pi} \\ &= \left[-x^2\ \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\,(-\cos x)\, dx + \frac{1}{12}\pi^4 + \pi^2 \\ &= -\pi^2 \times (-1) + \int_0^{\pi} 2x\ \cos x\, dx + \frac{1}{12}\pi^4 + \pi^2 \\ &= 2\int_0^{\pi} x\,(\sin x)'\, dx + \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \\ &= 2\left\{\left[x\ \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\, dx\right\} + \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \\ &= -2\int_0^{\pi} \sin x\, dx + \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \\ &= -2\left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \\ &= -2\{-(-1) - 1\} + \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \\ &= \frac{1}{12}\pi^4 + 2\pi^2 \end{aligned}$$