微分積分学 I（web 補講）

テイラー 展開・テイラー 級数

担当：佐藤 弘康

1. この講義の目的（1）

微分可能な関数は多項式（べき級数）で近似できる

- **級数**とは，無限個の項（数や式）の和のこと．
  （級数については，教科書 p.185〜 第 6 章 §1.2, 1.3 を参照）

  べき級数：$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

- 関数 $f(x)$ から，どのようにしてべき級数（テイラー級数）が得られるか，その考え方を理解しよう．
  （教科書 p.193〜 第 6 章 §2.1, 2.2, 2.3 を参照）

1. この講義の目的（2）

$\boxed{\text{微分可能な関数は多項式（べき級数）で近似できる}}$

べき級数近似（テイラー 展開）の応用として

- 円周率 π の近似値の計算法を紹介する.
- オイラーの等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ を導く.

2. 示すこと

関数 $f(x)$ の テイラー 級数

$f(x)$ が $x = a$ の近傍で微分可能ならば,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

- $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x),\ f''(x) = \dfrac{d}{dx}f'(x),\ f^{(3)}(x) = \dfrac{d}{dx}f''(x), \ldots$
- $f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とよぶ.
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (n の階乗)

3. なぜ, テイラー 級数で近似できるのか（1）

平均値の定理（教科書 p.85）

関数 $f(x)$ が a, b を含むある区間で連続かつ微分可能ならば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

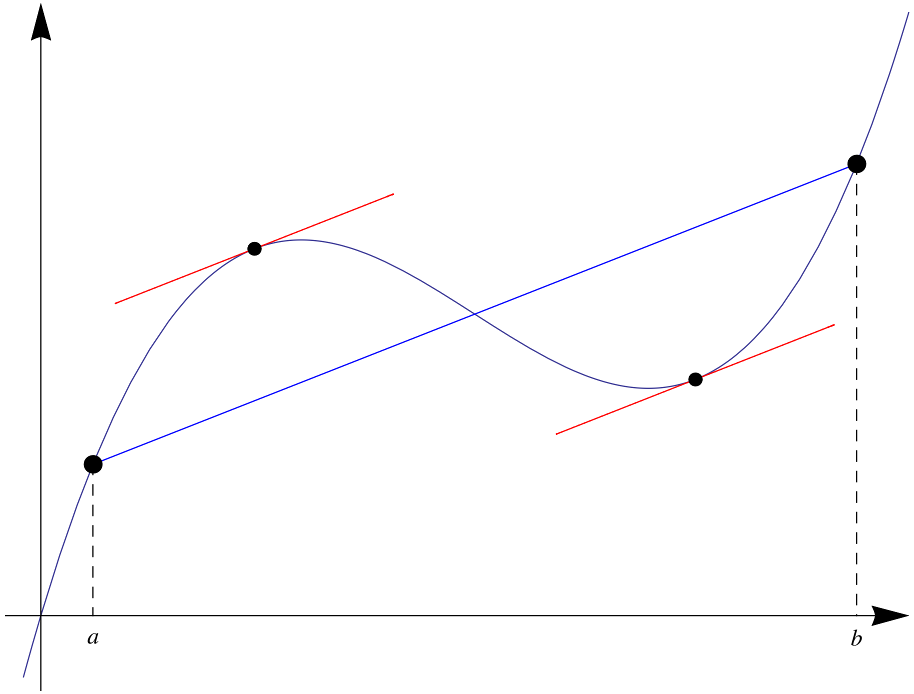
を満たす c が存在する.

この定理は何を意味しているのか？

3. なぜ, テイラー 級数で近似できるのか（2）

「平均値の定理」の等式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ の

- 左辺 は 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の傾き.
- 右辺 は $x = c$ における $y = f(x)$ の接線の傾き.


a
b

4. 平均値の定理からロルの定理へ（1）

平均値の定理（教科書 p.85）

関数 $f(x)$ が 区間 $[a, b]$ で微分可能ならば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b$$

を満たす c が存在する.

もしも, $f(a) = f(b)$ ならば ...

4. 平均値の定理からロルの定理へ（2）

ロルの定理（教科書 p.84）

関数 $f(x)$ が 区間 $[a, b]$ で微分可能, かつ $f(a) = f(b)$ ならば,

$$f'(c) = 0, \qquad a < c < b$$

を満たす c が存在する.

- 実際には「ロルの定理」の方が証明は簡単.
- 「平均値の定理」は「ロルの定理」を用いて証明される.

2. 示すこと（再掲）

関数 $f(x)$ の テイラー 級数

$f(x)$ が $x = a$ の近傍で微分可能ならば,

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

5. テイラー 級数の導出（1）

- 平均値の定理より,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \iff f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$
$$\iff f(b)=f(a)+f'(c)\,(b-a)$$

- ロルの定理より,

$$f(b)=f(a)+f'(a)\,(b-a)+\frac{f''(c)}{2}\,(b-a)^2$$

となる $a<c<b$ が存在することがわかる．なぜかというと…

5. テイラー 級数の導出（2）

- $F(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)\,(b-x) + K\,(b-x)^2\right)$

  とおき，K は $F(a) = 0$ を満たす定数とする.
- 定義より $F(b) = 0$ であるから，ロルの定理が適用できる.

  つまり，$F'(c) = 0,\ a < c < b$ を満たす c が存在する.
- $F'(x) = -f''(x)\,(b-x) + 2K(b-x).$
- $F'(c) = 0$ より，$K = \dfrac{f''(c)}{2}$ である.
- 仮定 $F(a) = 0$ より，

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \frac{f''(c)}{2}\,(b-a)^2$$

5. テイラー 級数の導出（3）

まとめると

- 平均値の定理より,

$$f(b) = f(a) + f'(c_1)\,(b-a)$$

となる $a < c_1 < b$ が存在する.

- ロルの定理より,

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \frac{f''(c_2)}{2}\,(b-a)^2$$

となる $a < c_2 < b$ が存在する.

以上のことを一般化すると,

5. テイラー 級数の導出（4）

テイラー の定理

関数 $f(x)$ が 区間 $[a, b]$ で微分可能ならば,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

を満たす c（ただし $a < c < b$）が存在する.

定数 b を変数 x にすることによって…

5. テイラー 級数の導出（4）

- 定数 b を変数 x にすることによって

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

を得る（c_x は x に対して決まる数であることに注意）.

- n をどんどん大きくしていくと，$\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ が限りなく 0 に近づくときがある（この項を**剰余項**という）.

この場合には，…

5. テイラー 級数の導出（5）

- n をどんどん大きくしていくと，$\dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ が限りなく 0 に近づくとき，

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

  と，$f(x)$ をべき級数として表すことができる．
- 上の級数を $x = a$ における $f(x)$ のテイラー 級数という．
- テイラー級数を求めることを，テイラー 展開という．

6. テイラー 展開の計算例（1）

$x = a$ における $f(x)$ のテイラー 級数を求めるためには，...

- 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求める（第 3 章 §4.1）.
- $x = a$ における第 n 次微分係数 $f^{(n)}(a)$ を求める.

そしてさらに

- 剰余項の評価

も必要だが，本講義では省略する.

6. テイラー展開の計算例（2）

例 1　$f(x) = e^x$ を $x = 0$ でテイラー展開する．　（$x = 0$ におけるテイラー展開を**マクローリン展開**という）

- $(e^x)' = e^x$ より，任意の n に対して，$f^{(n)}(x) = e^x$ である．
- したがって，$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$．

以上のことから，

$$
\begin{aligned}
e^x =& f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + \cdots \\
=& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots
\end{aligned}
$$

6. テイラー展開の計算例（3）

例2　$f(x) = \sin x$ を $x = 0$ でテイラー展開する.

- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ より,

  $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$,

  $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$.

- $f^{(4k)}(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1$,

  $f^{(4k+2)}(0) = -\sin 0 = 0$, $f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1$.

$$\therefore \ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

6. テイラー 展開の計算例（4）

例３　$f(x) = \log x$ を $x = 1$ でテイラー展開する.

- $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{2}{x^3}, \left(\dfrac{2}{x^3}\right)' = -\dfrac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots$
- $(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ より，$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

以上のことから,

$$\begin{aligned}\log x =& f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \cdots \\ =& (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots\end{aligned}$$

7. 近似式を描画してみよう（1）

テイラー 級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ に対して,

- 1 次近似：$f(x) \sim f(a) + f'(a)\,(x-a)$
- 2 次近似：$f(x) \sim f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

$$\vdots$$

- n 次近似：

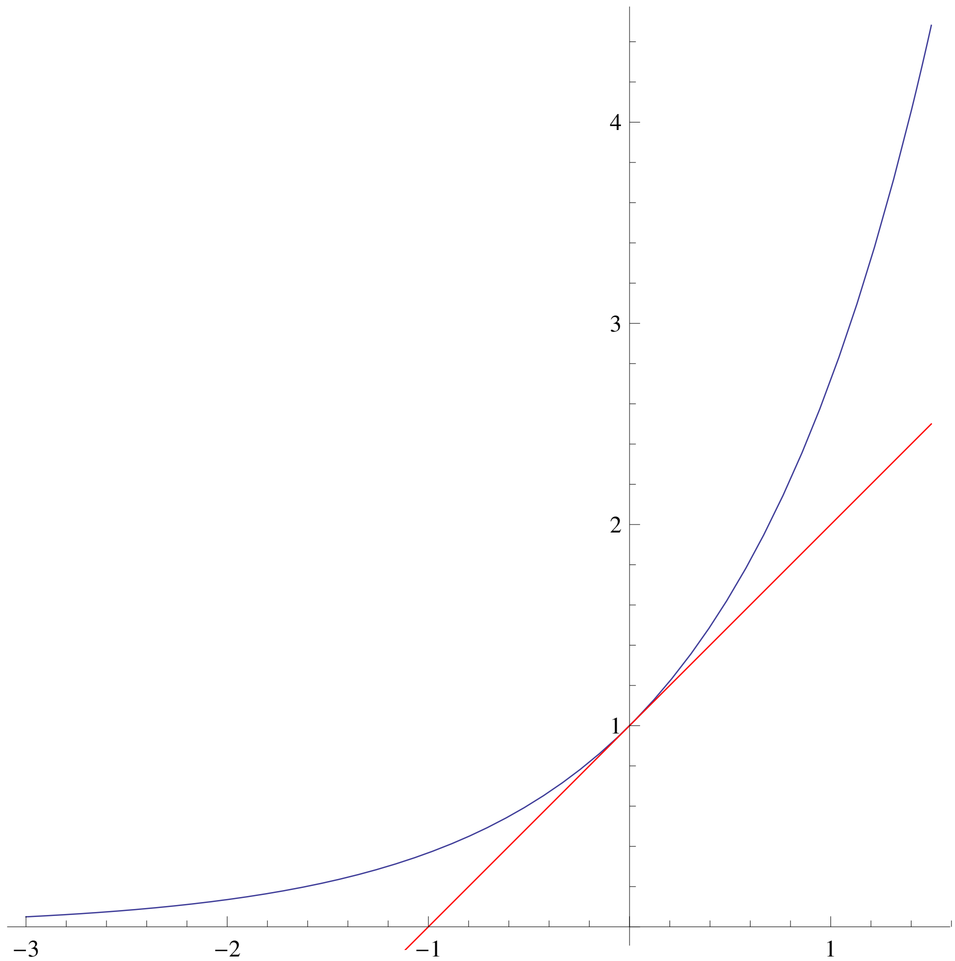
$$f(x) \sim f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

とよぶ（1 次近似の式は $x = a$ における接線の方程式である）.

7. 近似式を描画してみよう（2）

例 1 $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

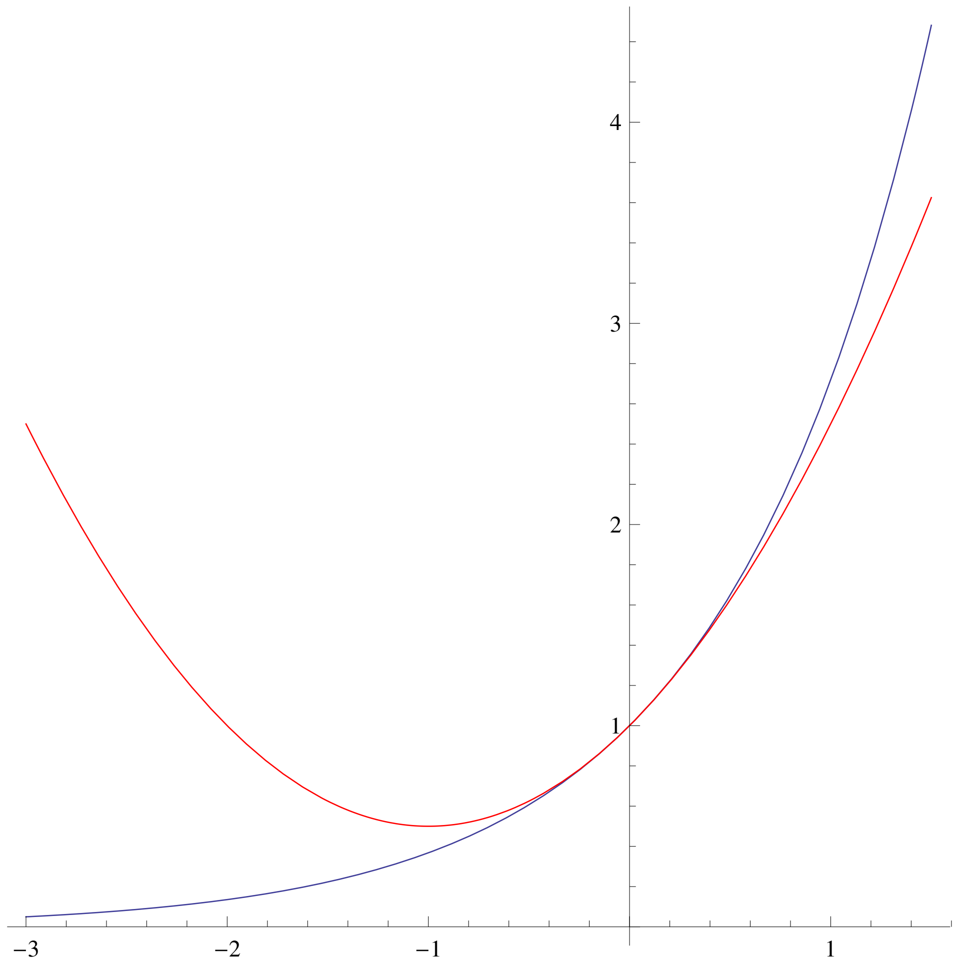
1 次近似



7. 近似式を描画してみよう（2）

例 1 $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

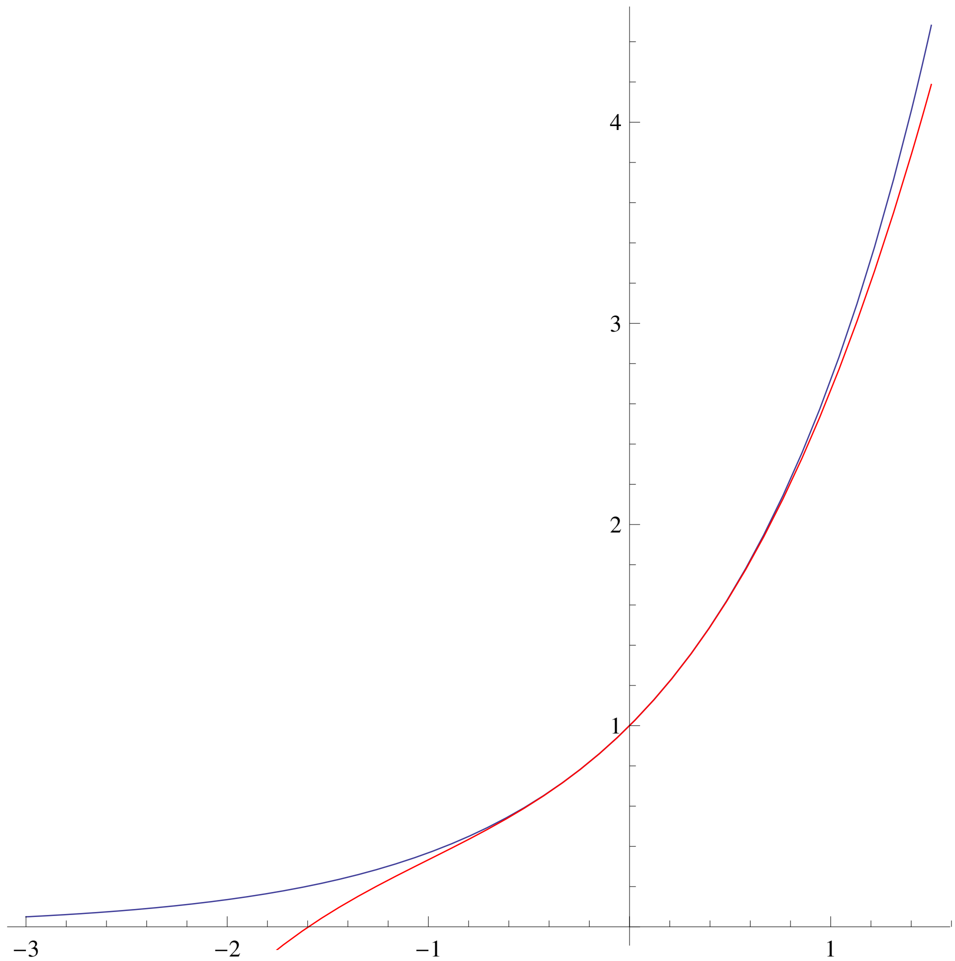
2 次近似



7. 近似式を描画してみよう（2）

例 1　$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

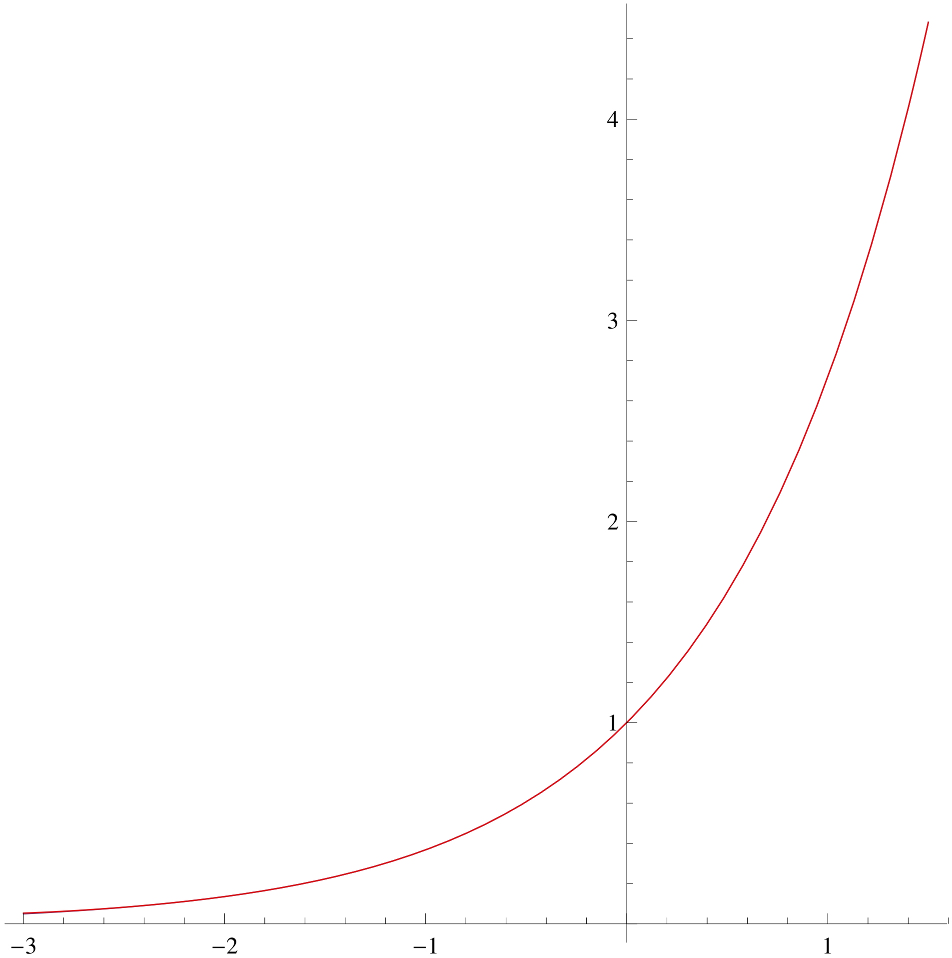
3 次近似



7. 近似式を描画してみよう（2）

例 1 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

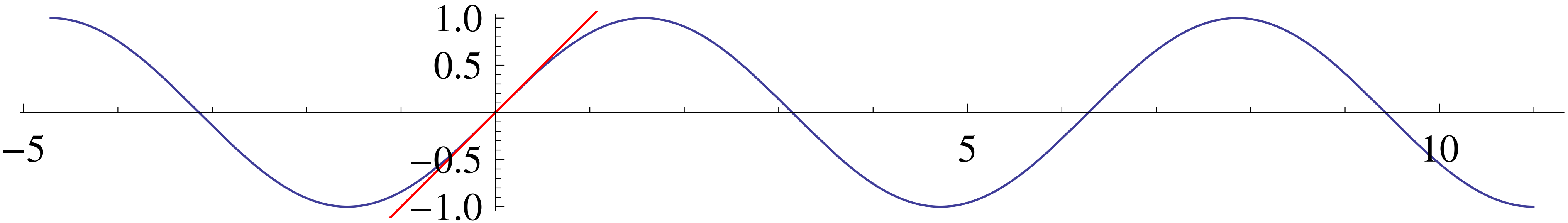
10 次近似



7. 近似式を描画してみよう（3）

例２　$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

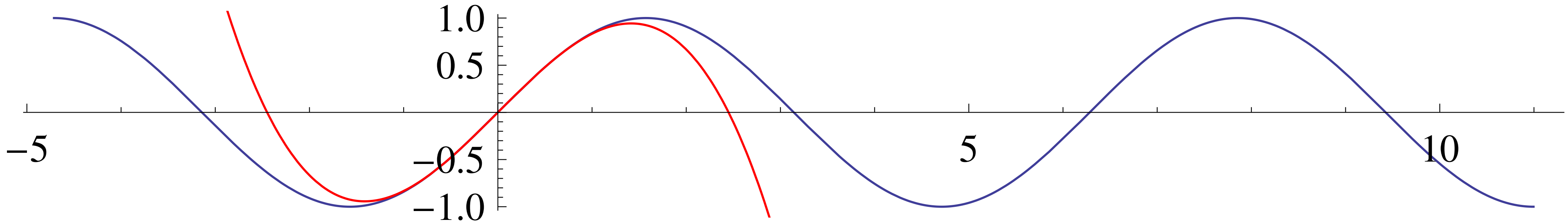
1 次近似



7. 近似式を描画してみよう（3）

例２　$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

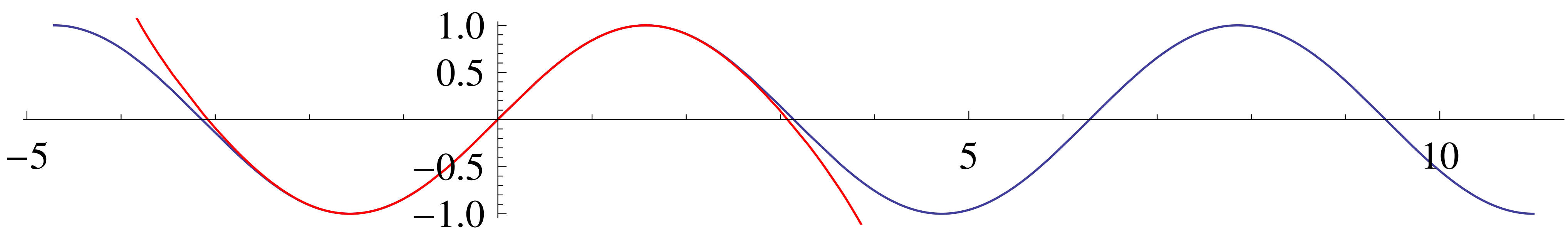
3 **次近似**



7. 近似式を描画してみよう（3）

例２　$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

7 次近似

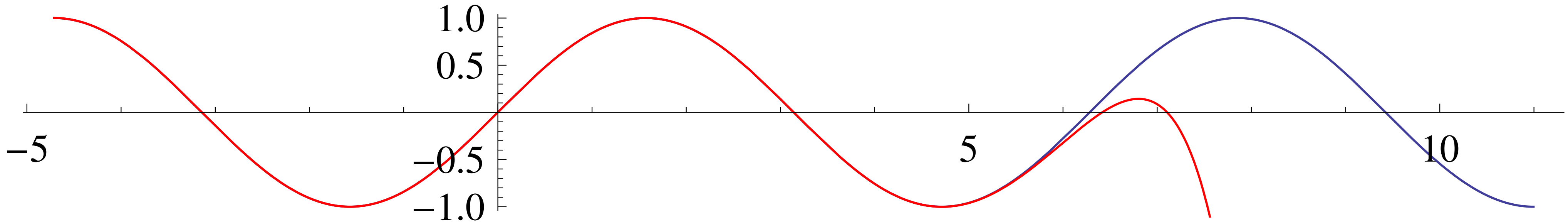


7. 近似式を描画してみよう（3）

例２

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

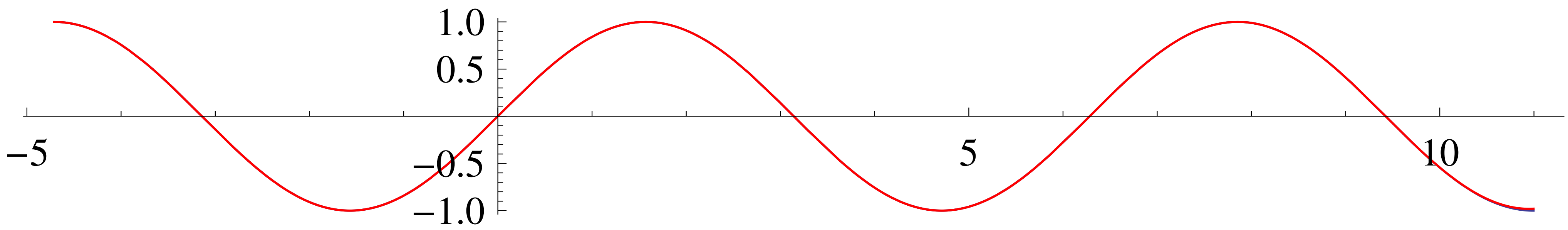
15 次近似



7. 近似式を描画してみよう（3）

例２
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

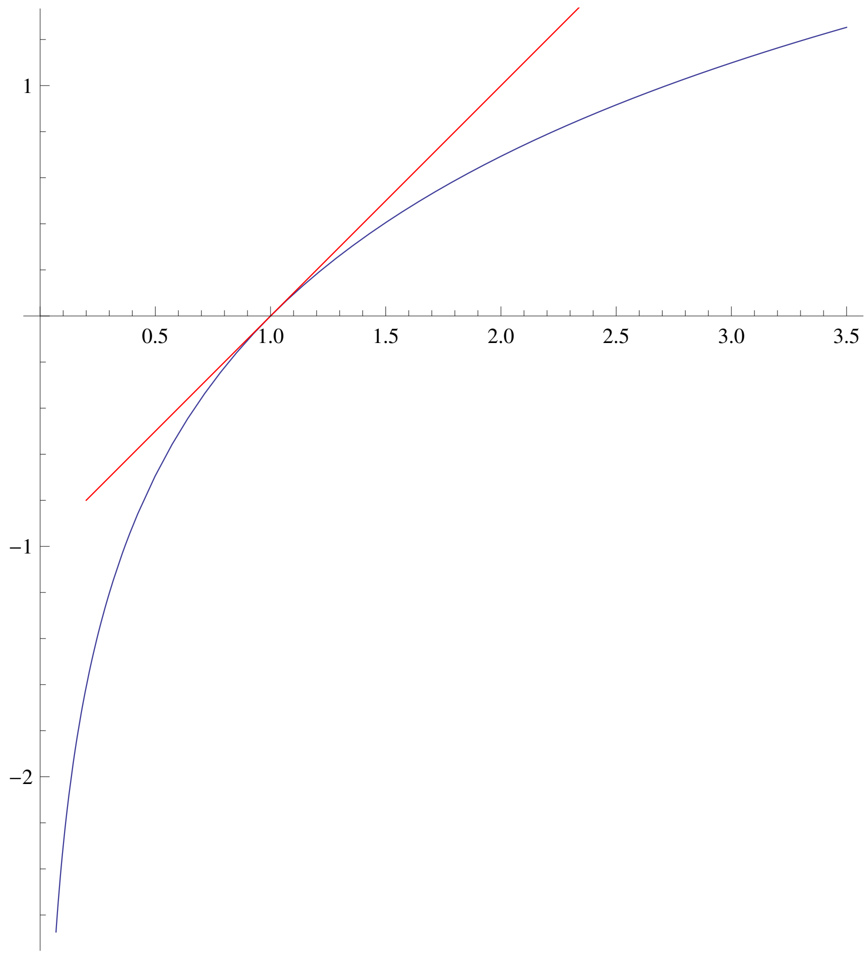
29 **次近似**



7. 近似式を描画してみよう（4）

例３ $$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

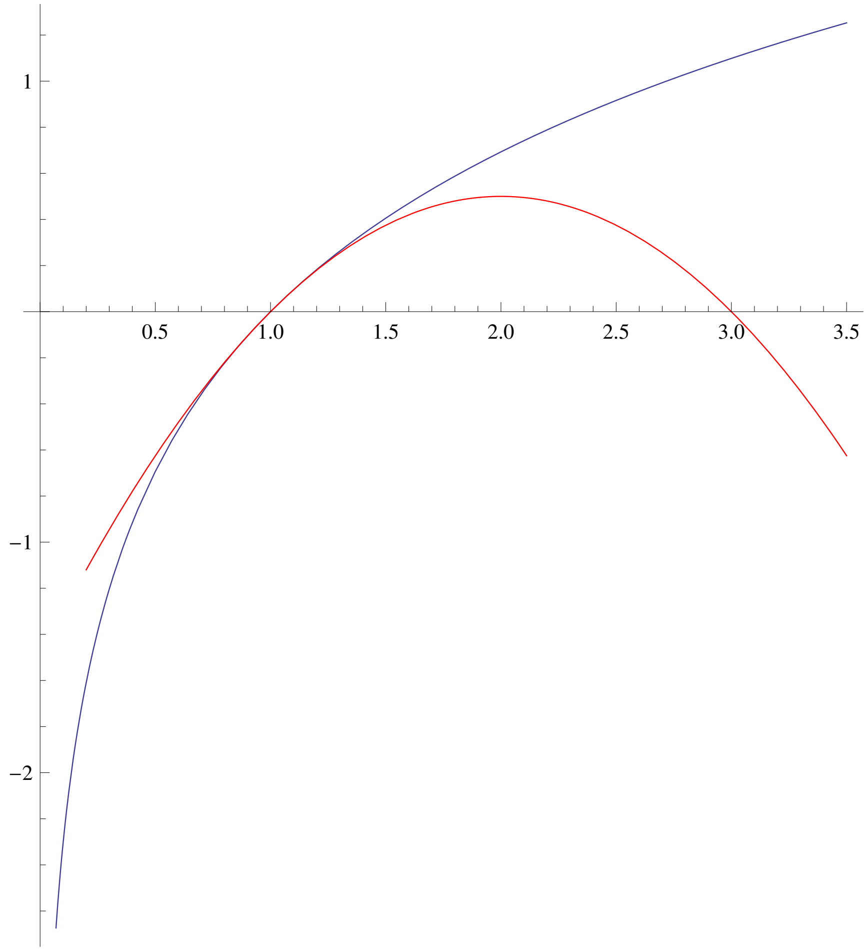
1 次近似



7. 近似式を描画してみよう（4）

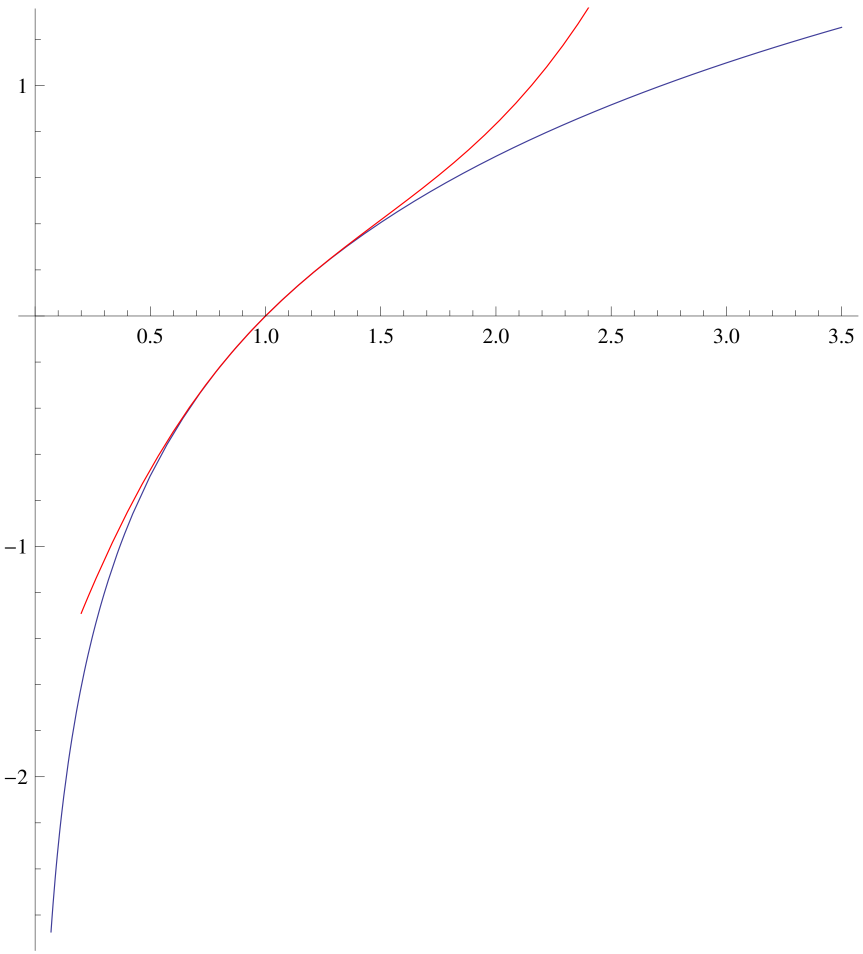
例３ $\log x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots$

2 次近似



7. 近似式を描画してみよう（4）

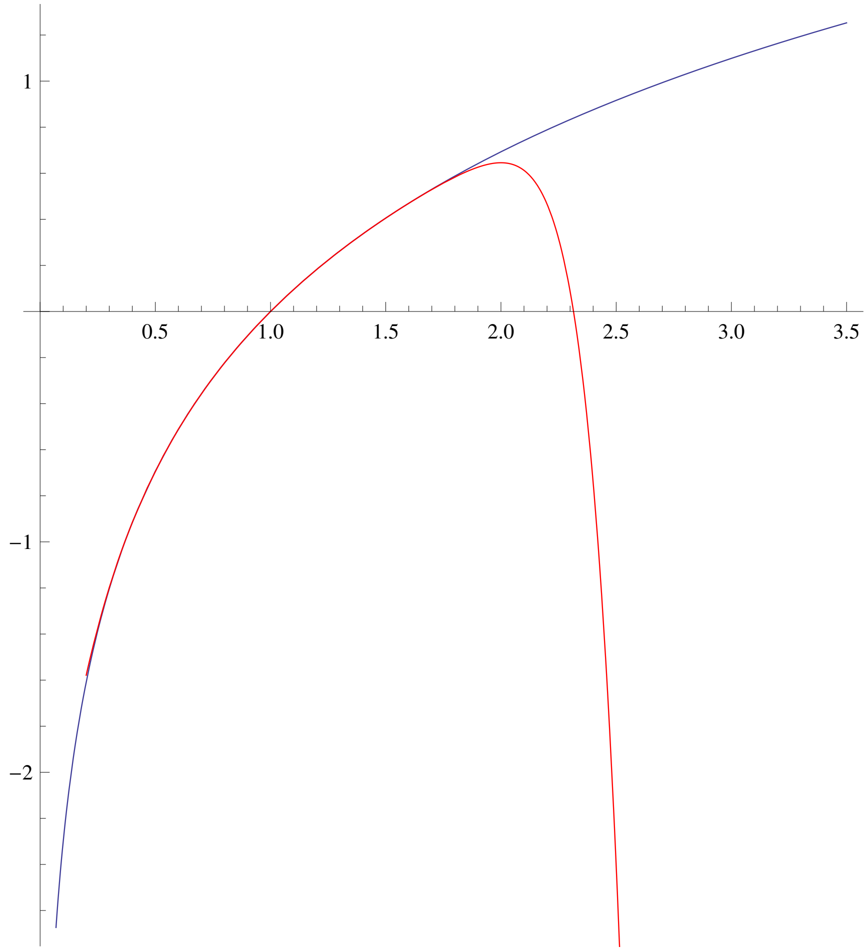
例３ $\log x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots$



3 次近似

7. 近似式を描画してみよう（4）

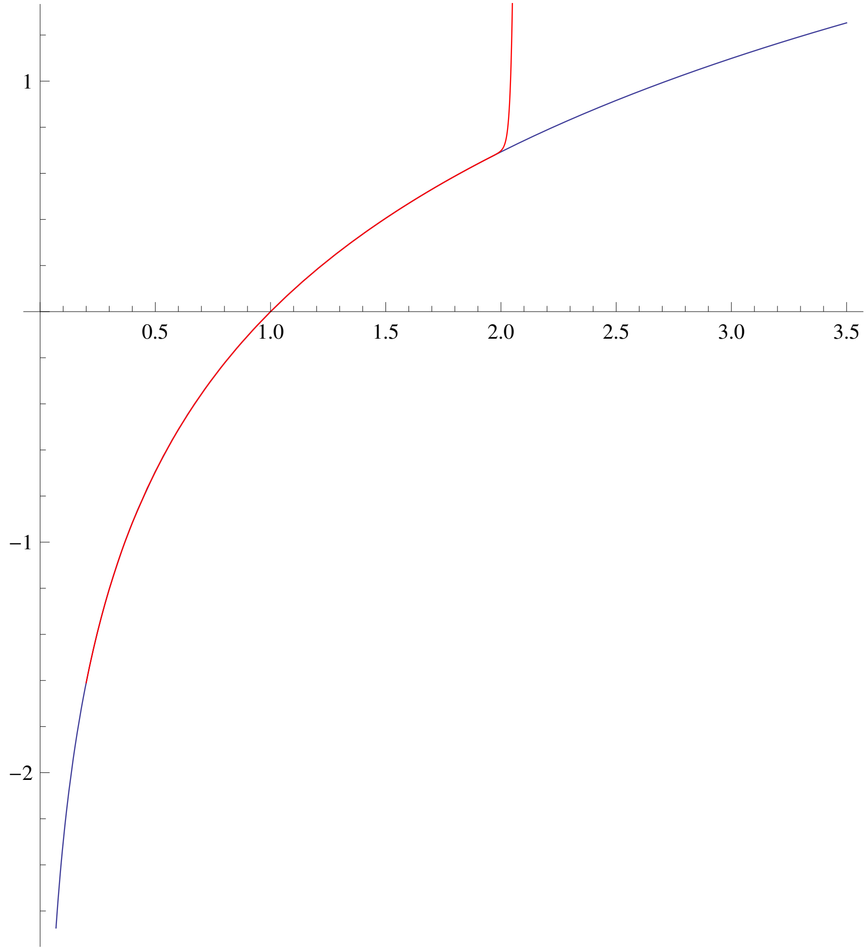
例３ $$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$



10 次近似

7. 近似式を描画してみよう（4）

例３ $\log x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots$



99 次近似

8. 剰余項の評価

- $x = 1$ における $f(x) = \log x$ の テイラー 級数は，$0 < x < 2$ の範囲でしか近似できない.
- これは，$f(x) = \log x$ の剰余項は $0 < x < 2$ の範囲でのみ $n \to \infty$ のとき 0 に収束するからである.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- $x = a$ におけるテイラー展開の剰余項が $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ の範囲で 0 に収束するとき，ε を $f(x)$ の**収束半径**という.

9. 応用１：円周率の近似値計算（１）

- 逆正接関数 $f(x) = \tan^{-1} x$ を $x = 0$ でテイラー展開すると

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \cdots$$

- $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ より，　$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$.
- したがって，

$$\begin{aligned}\pi &= 4 \tan^{-1} 1 \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{2m+1} + \cdots\right)\end{aligned}$$

9. 応用１：円周率の近似値計算（２）

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{2m+1} + \cdots\right)$$

この級数は近似の速さが遅い（注意：$\tan^{-1} x$ の収束半径は 1）.

- 3.1 が最初に現れるのは，37 次近似.
- 3.14 が最初に現れるのは，237 次近似.
- 3.141 が最初に現れるのは，3376 次近似.
- 3.1415 が最初に現れるのは，21587 次近似.

もっと効率のよい近似式が知られている.

10. 応用２：オイラーの公式へ（1）

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$

- θ は実数.
- i は虚数単位（$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1$）.

自然対数の底 e の「$i\theta$ 乗」とは何を意味するのか？

10. 応用２：オイラーの公式へ（２）

指数関数 e^x の テイラー 級数

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

の収束半径は ∞ である.

つまり，任意の x に対し，上の式の右辺の値は e^x の収束する.

このことから,

- 上の級数を指数関数 e^x の定義とする.
- さらに，変数の x を複素数まで拡張する（ことができる）.
  (複素関数論)

10. 応用２：オイラーの公式へ（３）

指数関数 e^z の 定義（z は複素数）：

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$z = i\,\theta$（θ は実数）のとき,

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= (i \text{ を含む項と含まない項に分ける}) \end{aligned}$$

10. 応用２：オイラーの公式へ（４）

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} + \cdots\right)$$
$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots\right)$$

三角関数のテイラー展開：

- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$

$\therefore\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$. **特に** $\theta = \pi$ **のとき，** $e^{i\pi} = -1$.