科 目 名 **微分積分学 III** **出 題 者 名** **佐藤 弘康**

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-3x^2}{x^2+2y^2}$ の極限値が存在すればその値を求め，存在しないならばその理由を述べよ．

平面上の点の座標を

$$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

と極表示すると，$(x,y)\to(0,0)$ は $r\to 0$ である．すると，

$$\frac{xy-3x^2}{x^2+2y^2}=\frac{\cos\theta\,\sin\theta-3\cos^2\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

となり，この値は θ に依存するので，$r\to 0$ のときの極限値は 存在しない ことがわかる．【1 点】

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x,y)=\cos(x-y)$ に対し，次を求めよ．

(1) $f_x(x,y)$

$$f_x(x,y)=-\sin(x-y)$$ 【1 点】

(2) $f_y(x,y)$

$$f_y(x,y)=-\sin(x-y)\times(-1)=\underline{\sin(x-y)}$$ 【1 点】

(3) $f_{xx}(x,y)$

$$f_{xx}(x,y)=-\cos(x-y)$$ 【1 点】

(4) $f_{xy}(x,y)$

$$f_{xy}(x,y)=-\cos(x-y)\times(-1)=\underline{\cos(x-y)}$$ 【1 点】

(5) $f_{yy}(x,y)$

$$f_{yy}(x,y)=\cos(x-y)\times(-1)=\underline{-\cos(x-y)}$$ 【1 点】

(6) 全微分 df

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy=\underline{-\sin(x-y)\,dx+\sin(x-y)\,dy}$$ 【1 点】

学籍番号	1						学科	
氏名								

3 $x^2+2xy+2y^2=1$ の陰関数を $f(x)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$F(x,y)=x^2+2xy+2y^2-1$ とおくと，$f(x)$ は $F(x,y)=0$ の陰関数である．したがって，

$$f(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2x+2y}{2x+4y}=\underline{-\frac{x+y}{x+2y}}.\quad【1点】$$

(2) $f(x)$ の極値を求めよ．

$x=a$ で $f(x)$ が極値 $b=f(a)$ をとるとする．つまり，$F(a,b)=0$ より，

$$a^2+2ab+2b^2=1.$$

さらに，$f'(a)=0$ であるから，(1) の結果より $a+b=0$. $b=-a$ を上式に代入することにより，$a^2=1$. つまり，$a=\pm1$ であり，このとき $b=\mp1$ である．次にこれらが極値を与えているか判定する．

$$f''(a)=-\frac{F_{xx}}{F_y}=-\frac{2}{2a+4b}=-\frac{1}{a+2b}$$

であるから，$f''(1)=1>0$, $f''(-1)=-1<0$ である．以上のことから，$f(x)$ は，<u>$x=1$ のとき極小値 -1</u> をとり，<u>$x=-1$ のとき極大値 1</u> をとる．

4 2変数関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y$ の極値を求めよ．

$f_x=2x+y-4$, $f_y=x+2y-2$ より，連立方程式 $f_x=0$, $f_y=0$ の解は $x=2, y=0$ である．したがって，$f(x,y)$ が極値をとるならば，点 $(2,0)$ においてである．

$f_{xx}=2>0$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2$ より，

$$f_{xx}(2,0)\,f_{yy}(2,0)-(f_{xy}(2,0))^2=4-1=3>0.$$

したがって，$f(x,y)$ は<u>点 $(2,0)$ において，極小値 $f(2,0)=-4$</u> をとる．

学籍番号	1						学科		
氏名									