平成 26 年度 春 秋 学期末試験問題・解答

試験実施日　平成 27 年　1 月 26 日　2 時限

出題者記入欄

試験科目名 微分方程式	出題者名 佐藤 弘康
試験時間 60 分	平常授業日 月 曜日 2 時限

持ち込みについて　可　不可

可、不可のいずれかに○印をつけ
持ち込み可のものを○で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他 (　)

本紙以外に必要とする用紙　解答用紙 0 枚　計算用紙 0 枚

通信欄

受験者記入欄

学科	学年	クラス	学籍番号	氏名

採点者記入欄

採点欄	評価

1 変数分離形の微分方程式 $y' = -2xy^2$ の解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \iff -\frac{1}{y^2}dy = 2x\,dx \quad 【3点】$$
$$\iff -\int \frac{1}{y^2}dy = \int 2x\,dx$$
$$\iff \frac{1}{y} = x^2 + C$$
$$\iff y = \frac{1}{x^2+C} \quad 【4点】$$

2 次の (1)〜(4) の中から同次形の微分方程式を 1 つ選び，変数変換によって変数分離形の微分方程式に変形せよ．

(1) $xy' = 2y + 4x^2$

(2) $xyy' = 2y^2 + 4x^2$

(3) $xyy' = 2y^3 + 4x^2$

(4) $xyy' = 2y^2 + 4x^2 + 3$

(2) が同次形．$xyy' = 2y^2 + 4x^2$ の両辺を x^2 でわると

$$\frac{y}{x} \times y' = 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4$$

$z = \frac{y}{x}$ とおくと（【6点】），$y' = z + xz'$ となり，上式に代入すると

$$\frac{y}{x} \times y' = 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 \iff z(z + xz') = 2z^2 + 4$$
$$\iff xz\frac{dz}{dx} = z^2 + 4$$
$$\iff \frac{z}{z^2+4}dz = \frac{1}{x}dx \quad 【6点】$$

3 線形微分方程式 $y' - 2y = e^x$ の解を求めよ．

1 階線形微分方程式 $y'' + P(x) = Q(x)$ の解法を利用する（$P(x) = -2,\ Q(x) = e^x$）．

$$\int P(x)\,dx = \int(-2)\,dx = -2\int dx = -2x.$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + C\right)$$
$$= e^{-(-2x)}\left(\int e^{-2x} \times e^x\,dx + C\right)$$
$$= e^{2x}\left(\int e^{-x}\,dx + C\right)$$
$$= e^{2x}\left(-e^{-x} + C\right)$$
$$= e^x\left(Ce^x - 1\right).$$

解は $\underline{y = e^x\left(Ce^x - 1\right)}$．【7点】

4 ベルヌーイの微分方程式 $y' - 2y = -y^3$ を変数変換によって線形微分方程式に変形せよ．

$z = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと（【6点】），$z' + 4z = 2$ となる（【6点】）．

5 次の各微分方程式に対し，完全ならば解を求め，完全でないならば積分因子を求めよ．

(1) $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y \neq \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y.$$

したがって，この微分方程式は 完全ではない．【6 点】

$$\frac{2y-(-2y)}{-2xy} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x},$$

$$\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\log x = \log x^{-2}.$$

したがって，積分因子は

$$e^{\log x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

である．【7 点】

(2) $\{(x+1)e^x - e^y\}\,dx - xe^y\,dy = 0$

$$\frac{\partial}{\partial y}((x+1)e^x - e^y) = -e^y = \frac{\partial}{\partial x}(-xe^y).$$

したがって，この微分方程式は 完全である．　【6 点】

一般解は

$$\begin{aligned}
C &= \int_a^x P(t,y)\,dt - \int_b^y Q(a,t)\,dt \\
&= \int_0^x ((t+1)e^t - e^y)\,dt - \int_0^y (-0\times e^t)\,dt \\
&= \int_0^x (t+1)(e^t)'dt - e^y\int_0^x dt \\
&= \left[(t+1)e^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\,dt - e^y(x-0) \\
&= (x+1)e^x - 1 - \left[e^t\right]_0^x - xe^y \\
&= (x+1)e^x - 1 - (e^x-1) - xe^y \\
&= x(e^x - e^y)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ x(e^x - e^y) = c. \qquad 【7 点】$$

6 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

補助方程式は

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0.$$

よって，一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$．　【7 点】

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0$

補助方程式は

$$t^2 + 4t + 4 = (t+2)^2 = 0.$$

よって，一般解は $y = (c_1x + c_2)e^{-2x}$．　【7 点】

(3) $y'' - 2y' + 10y = 0$

補助方程式

$$t^2 - 2t + 10 = 0$$

は実数解を持たず，解は $t = 1 \pm 3i$ である．よって，一般解は $y = (c_1\sin 3x + c_2\cos 3x)e^x$．　【7 点】

$\boxed{7}$ 多項式 $f(t)=t^2+bt+c$（ただし，b,c は定数）に対し，微分方程式 $f(D)y=0$ の一般解は $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ であるとする．このとき，微分方程式

$$\{2f(D-2)-f(D+3)\}y=x$$

の一般解を求めなさい．

$f(D)y=0$ の一般解が $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$ であることから，多項式 $f(t)$ は

$$f(t)=t^2+bt+c=(t-2)(t+3)=t^2+t-6$$

である．　【5 点】

$$\begin{aligned}2f(t-2)-f(t+3)=&2((t-2)-2)((t-2)+3)\\&-((t+3)-2)((t+3)+3)\\=&2(t-4)(t+1)-(t+1)(t+6)\\=&(t+1)\{2(t-4)-(t+6)\}\\=&(t+1)(t-14).\end{aligned}$$

したがって，微分方程式 $\{2f(D-2)-f(D+3)\}y=x$ は

$$(D+1)(D-14)y=x$$

である．
線形同次微分方程式 $(D+1)(D-14)y=0$ の一般解は

$$c_1e^{-x}+c_2e^{14x}$$

である．　【5 点】
線形同次微分方程式 $(D+1)(D-14)y=x$ の解は

$$\begin{aligned}y=&\frac{1}{D-14}\frac{1}{D+1}x\\=&\frac{1}{D-14}\left(e^{-x}\int e^{x}x\,dx\right)\\=&\frac{1}{D-14}\left\{e^{-x}\left(e^{x}x-\int e^{x}\,dx\right)\right\}\\=&\frac{1}{D-14}\left\{e^{-x}\left(e^{x}x-e^{x}\right)\right\}\\=&\frac{1}{D-14}(x-1)\\=&e^{14x}\int e^{-14x}(x-1)\,dx\\=&e^{14x}\int\left(-\frac{1}{14}e^{-14x}\right)'(x-1)\,dx\\=&e^{14x}\left\{-\frac{1}{14}e^{-14x}(x-1)-\int\left(-\frac{1}{14}e^{-14x}\right)\,dx\right\}\\=&e^{14x}\left\{-\frac{1}{14}e^{-14x}(x-1)-\frac{1}{14^2}e^{-14x}\right\}\\=&-\frac{1}{14}(x-1)-\frac{1}{14^2}\\=&-\frac{1}{14^2}(14x-13).\end{aligned}$$

したがって，求める一般解は

$$y=-\frac{1}{14^2}(14x-13)+c_1e^{-x}+c_2e^{14x}$$

である．　【5 点】